

TEKNILLINEN KORKEAKOULU
Elektroniikan, tietoliikenteen ja automaation tiedekunta

Henri Johannes Markkanen

LÄHTEETTÖMÄN REUNAEHDON KAPPALEEN SÄHKÖMAGNEET-
TISEN SIRONNAN LASKEMINEN INTEGRAALIYHTÄLÖMENETEL-
MÄLLÄ

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi diplomi-insinöörin
tutkintoa varten Espoossa 7.9.2009

Työn valvoja:

Akat. Prof. Ari Sihvola

Työn ohjaaja:

Dos. Pasi Ylä-Oijala

Tekijä: Henri Johannes Markkanen

Työn nimi: Lähteettömän reunaehdon kappaleen sähkömagneettisen sironnan
laskeminen integraaliyhtälömenetelmällä

Päivämäärä: 7.9.2009

Kieli: Suomi

Sivumäärä: 8+98

Tiedekunta: Elektroniikan, tietoliikenteen ja automaation tiedekunta

Professuuri: Radiotekniikka

Koodi: S-26

Valvoja: Akat. Prof. Ari Sihvola

Ohjaaja: Dos. Pasi Ylä-Oijala

Tämän diplomityön tarkoituksena oli tutkia sähkömagneettisen säteilyn sirontaa kappaleista, jotka toteuttavat lähteettömän reunaehdon. Lähteettömän reunaehdon mukaan kappaleen pinnalle indusoituneet ekvivalentit sähköiset ja magneettiset pintavirtatiheydet ovat lähteettämiä. Lähteetön reunaehto tunnetaan myös nimellä DB-reunaehto, koska ekvivalenttien pintavirtatiheyksien lähteettömyydestä seuraa se, että pinnan normaalinsuuntaiset sähkö- ja magneettivuontiheyskomponentit (\mathbf{D} , \mathbf{B}) häviävät pinnalla. DB-reuna voidaan toteuttaa anisotrooppisen väliaineen avulla, missä pinnan normaalinsuuntaiset väliaineparametrit permittiivisyys ja permeabiilisuus lähestyvät nollaa.

Sirontatehtävä ratkaistiin numeerisesti pintaintegraaliyhtälömenetelmällä, joka tunnetaan myös nimellä BEM (Boundary element method). Integraaliyhtälömenetelmässä Maxwellin yhtälöiden reuna-arvo-ongelma formuloidaan integraaliyhtälöiksi, missä tuntemattomia ovat ekvivalentit pintavirtatiheydet. Integraaliyhtälöt diskretoidaan ja muutetaan lineaariseksi yhtälöryhmäksi momenttimenetelmällä. Lineaarinen yhtälöryhmä voidaan ratkaista Gaussin eliminaatiolla ja ratkaisusta voidaan laskea sironneet kentät.

Sirontapoikkipinta laskettiin erilaisille DB- ja ideaalijohtaville eli PEC-kappaleille. Mielenkiintoisin tulos oli, että symmetrisillä DB-kappaleilla ei ole takaisinsirontaa. DB-kuutiolle ja pallolle laskettiin sirontatehokkuus taajuuden funktiona ja tuloksia verrattiin PEC-kuution ja pallon sirontatehokkuuksiin. Tuloksista huomattiin, että PEC-kappale verrattuna DB-kappaleeseen on voimakkaampi sirottaja matalilla taajuuksilla. Työssä näytettiin myös, että dynamiikan pintaintegraaliyhtälömenetelmällä on mahdollista laskea staattinen polarisoituvuus DB-kappaleille ilman perinteisiä matalan taajuuden ongelmia.

Avainsanat: DB-reunaehto, Lähteetön reunaehto, Integraaliyhtälömenetelmä, Momenttimenetelmä, Sähkömagneettinen sironta, Polarisoituvuus

Author: Henri Johannes Markkanen		
Title: Computation of electromagnetic scattering from divergenceless boundary objects using integral equation method		
Date: 7.9.2009	Language: Finnish	Number of pages: 8+98
Faculty: Faculty of Electronics, Communications and Automation		
Professorship: Radio engineering		Code: S-26
Supervisor: Academy Professor Ari Sihvola		
Instructor: Docent Pasi Ylä-Oijala		
<p>The purpose of this Master's thesis was to examine electromagnetic scattering from objects which satisfy a divergenceless boundary condition, also known as a DB boundary condition. The DB boundary condition requires that the normal components of electric and magnetic flux densities vanish on the surface. It is also equivalent to that the divergences of equivalent electric and magnetic surface current densities are zero. The DB boundary is interesting because it can provide some new microwave engineering applications. A realization of the DB boundary is a challenge for metamaterial research. The realization can be possible with a uniaxial anisotropic medium where the axial permittivity and permeability parameters go to zero.</p> <p>Scattered electric and magnetic fields were computed by using a surface integral equation method, also known as a boundary element method. In the surface integral equation method, boundary value problems for Maxwell's equations are formulated as integral equations where the unknowns are the equivalent electric and magnetic surface current densities. These integral equations are discretized and converted to the system of linear equations by method of moments. The system of linear equations can be solved by using Gaussian elimination and the scattered electric and magnetic fields can be calculated from the equivalent surface current densities.</p> <p>The scattering cross sections were computed for DB and PEC objects. The most interesting result was that there is no backscattering from symmetric DB objects. The scattering efficiency of the DB cube and sphere were computed as functions of frequency and the results were compared with PEC cube and sphere. Also the static polarizability, was calculated. It turned out that the integral equation formulation for the DB boundary does not suffer from the low frequency breakdown.</p>		
Keywords: DB-boundary, Integral equation method, Method of Moments, Electromagnetic scattering, Polarizability		

Esipuhe

Haluan kiittää erityisesti työni valvojaa akatemia professori Ari Sihvolaa ja työni ohjaajaa dosentti Pasi Ylä-Oijalaa mahdollisuudesta työskennellä erittäin mielenkiintoisen aiheen parissa. Lisäksi haluan kiittää heitä kaikista työhöni liittyvistä ideoista, neuvoista ja ohjauksesta.

Suuri kiitos kuuluu myös koko Radiotieteen ja -tekniikan laitoksen henkilökunnalle mukavasta ja kannustavasta työympäristöstä. Erityisesti niille henkilöille, jotka ovat minua auttaneet niin käytännön asioissa kuin työhön liittyvissä asioissa.

Lopuksi haluan kiittää vanhempiani saamastani taloudellisesta tuesta koko opiskeluajalta.

Otaniemi, 28.8.2009

Johannes Markkanen

Sisältö

Tiivistelmä	ii
Tiivistelmä (englanniksi)	iii
Esipuhe	iv
Sisällysluettelo	v
Symbolit ja lyhenteet	vii
1 Johdanto	1
2 Sähkömagneettisen siirron teoriaa	4
2.1 Maxwellin yhtälöt	4
2.2 Siirontatehtävän matemaattinen formulointi	6
2.3 Reuna- ja rajapintaehdot	7
2.4 Kenttien käyttäytyminen terävässä kiilassa	11
2.5 Siirontaa kuvaavat suureet	14
2.5.1 Tutkupoikkipinta	14
2.5.2 Staattinen polarisoituvuus	15
3 Pintaintegraaliyhtälöt	18
3.1 Ekvivalenssiperiaate	22
3.2 Integraaliyhtälöt PEC-reunaehdolle	24
3.3 Integraaliyhtälöt DB-reunaehdolle	25
3.3.1 Normalisoitu integraaliyhtälö	26
3.3.2 Yhdistetyt kenttäintegraaliyhtälöt DB-reunaehdolle	27
3.4 Siironneet kentät	28
4 Momenttimenetelmä	30
4.1 Pintavirtatiheyksien diskretointi	30
4.1.1 Muotofunktiot	32
4.1.2 RWG-kantafunktiot	34
4.1.3 Lineaariset kantafunktiot	36
4.1.4 Silmukkakantafunktiot	37

4.2	Yhtälöiden testaus Galerkinin menetelmällä	39
5	Integraalien numeerinen laskeminen	43
5.1	Numeerinen integrointi kolmioelementillä	43
5.2	Matriisialkioiden numeerinen laskeminen	44
6	Tulokset	51
6.1	Sironta pallosta	51
6.1.1	Sironta Rayleigh-alueella	52
6.1.2	Staattinen polarisoituvuus	53
6.1.3	Pintavirtatiheyksien käyttäytyminen pallon pinnalla	55
6.1.4	Sironta korkeammilla taajuuksilla	59
6.1.5	Kantafunktioiden vaikutus ratkaisun tarkkuuteen	62
6.2	Sironta kuutiosta	65
6.2.1	Kantafunktioiden vaikutus ratkaisun tarkkuuteen	65
6.2.2	Sironta erikokoisista kuutioista	66
6.2.3	Ekvivalentit pintavirtatiheydet kuution pinnalla	68
6.2.4	DB-kuution polarisoituvuus	69
6.2.5	Kuution sirontatehokkuus	70
6.2.6	Kuution asennon vaikutus sirontapoikkipintaan	73
6.3	Sironta epäsymmetrisistä kappaleista	76
6.3.1	Sironta laatikosta	76
6.3.2	Sironta puolipallosta	80
7	Yhteenveto	87
	Viitteet	90
	Liite A: Pintavirtatiheydet erikokoisten pallojen pinnoilla	92

Symbolit ja lyhenteet

Symbolit

\mathbf{a}	vektori
$\bar{\mathbf{a}}$	dyadi
\mathbf{B}	magneettivuontiheys
c	valon nopeus
\mathbf{D}	sähkövuontiheys
\mathbf{E}	sähkökentän voimakkuus
G	Greenin funktio
\mathbf{H}	magneettikentän voimakkuus
i	imaginääriyksikkö
\mathbf{J}	ekvivalentti sähköinen pintavirtatiheys
\mathbf{J}_s	sähköinen lähdevirtatiheys
k	aaltoluku
\mathbf{M}	ekvivalentti magneettinen pintavirtatiheys
\mathbf{M}_s	magneettinen lähdevirtatiheys
\mathbf{m}	kolmioelementin särmän yksikköulkonormaali
m_s	magneettinen lähdevaraustiheys
\mathbf{n}	pinnan normaalivektori
$N_{n,l}$	kolmioelementin T_n kärkipisteeseen \mathbf{p}_l liittyvä muotofunktio
$\mathbf{p}_{n,l}$	kolmioelementin T_n kärkipiste
Q_{sca}	sirontatehokkuus
\mathbf{r}	kenttäpisteen paikkavektori
\mathbf{r}'	lähdepisteen paikkavektori
T_n	kolmioelementti
α	polarisoituvuus
α_n	normalisoitu polarisoituvuus
δ	detafunktio
η	aaltoimpedanssi
λ	aallonpituus
μ	permeabiilisuus
ρ_s	sähköinen lähdevaraustiheys
σ	sirontapoikkipinta
ϵ	permittiivisyys
ϕ	potentiaali
ω	kulmataajuus
(x, y, z)	kartesien koordinaatiston paikkakoordinaatit
(r, θ, φ)	pallokoordinaatiston paikkakoordinaatit
(ρ, φ)	napakoordinaatiston paikkakoordinaatit

Operaattorit

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	vektorien \mathbf{A} ja \mathbf{B} pistetulo
$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$	vektorien \mathbf{A} ja \mathbf{B} ristitulo
$\nabla \times \mathbf{A}$	vektorin \mathbf{A} roottori
$\nabla \cdot \mathbf{A}$	vektorin \mathbf{A} divergenssi
∇A	funktion A gradientti
$\nabla_s \times \mathbf{A}$	vektorin \mathbf{A} pintaroottori
$\nabla_s \cdot \mathbf{A}$	vektorin \mathbf{A} pintadivergenssi
$\nabla_s A$	funktion A pintagradientti
∇^2	Laplacen operaattori
$\frac{d}{dt}$	derivaatta muuttujan t suhteen
$\frac{\partial}{\partial t}$	osittaisderivaatta muuttujan t suhteen
\sum_j	summa indeksin j yli
$\Re(f)$	reaaliosa funktiosta f
$\Im(f)$	imaginääriosia funktiosta f
$\mathcal{I}(f)$	identtinen operaattori
$\mathcal{K}(f)$	vektori kaksikerrospotentiaali
$\mathcal{S}(f)$	yksikerrospotentiaali

Lyhenteet

BEM	Boundary Element Method
CFIE	Combined Field Integral Equation
EFIE	Electric Field Integral Equation
FEM	Finite Element Method
MFIE	Magnetic Field Integral Equation
MoM	Method of Moments
PEC	Perfect Electric Conductor
PEMC	Perfect Electromagnetic conductor
PMC	Perfect Magnetic conductor
RCS	Radar cross section
RWG	Rao, Wilton, Glisson

1 Johdanto

Sähkömagneettisen säteilyn sironta mielivaltaisesta kappaleesta voidaan ratkaista Maxwellin yhtälöiden reuna-arvo-ongelmasta. Ratkaisun on toteutettava sekä differentiaaliyhtälöt että sopiva reunaehto. Jos reunaehto on liian tiukka, ratkaisua ei ole olemassa, ja liian löyhän reunaehdon tapauksessa ratkaisu ei ole yksikäsitteinen. On olemassa monia reunaehtoja, joiden avulla saadaan yksikäsitteinen ratkaisu, ja nämä ratkaisut mallintavat hyvällä tarkkuudella tiettyjä fysikaalisia tilanteita.

Tässä diplomityössä on tarkoitus tutkia sähkömagneettisen säteilyn sirontaa aika-harmonisessa tilanteessa erilaisista kappaleista, jotka toteuttavat lähteettömän reunaehdon. Lähteettömällä reunaehdolla tarkoitetaan reunaehto, missä kappaleen pinnalle indusoituneet ekvivalentit sähköiset ja magneettiset pintavirtatiheydet ovat divergenssittömiä, eli pinta ei sisällä mitään erillisiä lähteitä mistä virtaa leviäisi ympäristöön, ja vastaavasti pinta ei sisällä nieluja mihin virtaa häviäisi. Tämä tarkoittaa, että pinnalle syntyneiden ekvivalenttien pintavirtojen täytyy muodostua silmukoista. Lähteetön reunaehto tunnetaan myös nimellä DB-reunaehto, koska ekvivalenttien pintavirtatiheyksien lähteettömyydestä seuraa se, että kappaleen pinnalla pintaa vastaan kohtisuorassa olevat sähkö- ja magneettivuontiheyskomponentit häviävät. Itse lyhenne DB tulee siitä, että symbolilla \mathbf{D} kuvataan usein sähkövuontiheyttä ja symbolilla \mathbf{B} magneettivuontiheyttä. Jos DB-kappale sijaitsee lineaarisessa, isotrooppisessa ja homogeenisessä väliaineessa, häviävät myös sähkö- ja magneettikenttien normaalikomponentit DB-kappaleen pinnalla. DB-reunaehdon toteuttavaa materiaalia ei ole luonnossa olemassa, mutta keinotekoisesti voi olla mahdollista valmistaa materiaali, joka näyttäisi toteuttavan lähteettömän reunaehdon. Tällaisia keinotekoisia materiaaleja kutsutaan usein sähkömagneettisiksi metamateriaaleiksi.

Sähkö- ja magneettikenttien normaalikomponentteihin liittyvillä reunaehdoilla on pitkä historia. Jo vuonna 1959 Rumsey esitti reunaehdon, jonka mukaan sähkö- ja magneettikenttien normaalikomponentit häviävät pinnalla [1]. Lisäksi 1970-luvulla Yee ja Picard ovat kirjoittaneet aiheeseen liittyvät artikkelit [2], [3]. Sähköisten metamateriaalien tutkimuksesta on tullut hyvin suosittua viimeaikoina, joten myös DB-reunaehto on tutkittu, koska sen toteutus saattaa olla mahdollista. DB-reunaehdon perusominaisuuksista ja toteutuksesta voidaan lukea viitteestä [4].

Sähkömagneettisen metamateriaalin määrittäminen ei ole aivan yksinkertaista, ja määritelmät ovat muuttuneet valtavasti viime vuosien aikana alan tutkimuksen kehityksen mukana. Metamateriaalin voidaan ajatella olevan luonnossa esiintymätöntä keinotekoisesti valmistettua materiaalia, jolla on erikoisia sähkömagneettisia ominaisuuksia. Metamateriaalin ominaisuudet perustuvat sen makroskooppisiin rakenteisiin, joita kutsutaan elementeiksi. Elementit koostuvat normaaleista materiaaleista ja ne ovat kooltaan aallonpituuteen nähden pieniä. Kun suuri määrä elementtejä laitetaan sopivaan järjestykseen, niiden muodostama systeemi näyttää homogeeniselta kappaleelta, jolla on erikoisia sähkömagneettisia ominaisuuksia sopivalla taajuudella. Toisaalta monilla normaaleilla materiaaleilla on samoja rakenteellisia ominaisuuksia. Metamateriaalit koostuvat elementeistä samalla tavalla kuin normaalit materiaalit

koostuvat atomeista, ja niiden sähkömagneettiset ominaisuudet määräytyvät pitkälti siitä miten elementit tai atomit ovat järjestäytyneet. Tietysti myös elementtien ja atomien rakenne vaikuttaa näihin ominaisuuksiin. Metamateriaalien määrittelystä voidaan lukea lisää esimerkiksi viitteestä [5].

Sähkömagneettisten metamateriaalien ominaisuuksina voi olla esimerkiksi negatiiviset väliaineparametrit permittiivisyys ϵ ja permeabiilisuus μ . Nämä puolestaan aiheuttavat hyvin erikoisia ilmiöitä. Esimerkiksi sähkömagneettinen säteily voi taittua tai heijastua metamateriaalista normaalista poikkeavalla tavalla. Metamateriaalien avulla on saavutettu negatiivisia taitekertoimia, jolloin sähkömagneettinen säteily taittuu niin sanotusti väärään suuntaan. Näin ollen metamateriaaleille löytyy paljon teknisiä sovelluksia, joiden toteuttaminen on vaikeaa tai mahdotonta normaaleja materiaaleja käyttäen. Niistä voidaan valmistaa muun muassa linsejä, suodattimia ja häivetekniikkaa. Metamateriaalien yleisistä ominaisuuksista ja sovelluksista voidaan lukea viitteestä [6].

Sähkömagneettisen säteilyn sironnan laskeminen mielivaltaisesta kappaleesta ei ole mikään yksinkertainen ongelma. Sironna pystytään laskemaan analyttisesti vain yksinkertaisille kappaleille kuten pallolle Mie-sarjan avulla [7]. Myös kvasistaattisella analyysillä voidaan laskea sironneet kentät, jos kappale on hyvin pieni verattuna aallonpituuteen ja tarkastelupiste on kaukana kohteesta. Tällöin kappale korvataan sähköisillä ja magneettisilla dipoleilla, joiden aiheuttamat kentät voidaan laskea analyttisesti. Kaukokentässä korkeamman asteen multipoleista aiheutuneet kentät ovat vaimentuneet olemattomiin, joten dipolien avulla saadaan hyvä approksimaatio kaukokentälle. Ongelmaksi jää vain miten määrittää kyseiset dipolimomentit mielivaltaiselle kappaleelle. Kappaleen kaarevuussäteen ollessa huomattavasti suurempi kuin aallonpituus voidaan sironnan määrittämiseen käyttää optisia menetelmiä. Optisissa menetelmissä aallon polarisaatio pidetään muistissa ja laskenta voidaan suorittaa skalaarisuureilla. Optisia menetelmiä voidaan parantaa ottamalla huomioon diffraktiosta aiheutuneet kentät.

Tietokoneiden laskentakapasiteetin kehitys on kuitenkin mahdollistanut sähkömagneettisen sironnan laskemisen numeerisin menetelmin. Varsinkin pintaintegraaliyhtälömenetelmä, joka tunnetaan myös nimellä BEM (Boundary Element Method), soveltuu hyvin sironnan laskemiseen. Joskus menetelmästä käytetään myös nimeä momenttimenetelmä MoM (Method of Moments). Pintaintegraaliyhtälömenetelmän etuna sirontaongelmissa on se, että menetelmässä tarvitsee diskretoida vain sirottajien pinnat kenttien laskemiseksi missä tahansa avaruuden pisteessä. Toisin kuin esimerkiksi elementtimenetelmässä FEM (Finite Element Method), missä joudutaan diskretoimaan koko laskentatilavuus. Haittapuolena integraaliyhtälömenetelmässä on se, että ratkaistavasta matriisista tulee täysi, jolloin muistin tarve ja laskenta-aika kasvaa nopeasti ongelman koon kasvaessa. Käytännössä tämä rajoittaa ratkaistavan geometrian monimutkaisuutta ja kokoa suhteessa aallonpituuteen. Lisäksi integraaliyhtälömenetelmässä tulee singulaarisia integraaleja, joiden numeerinen laskenta ei ole aivan yksinkertaista.

Tässä diplomityössä on laskettu sähkömagneettisen säteilyn sirontaa pintaintegraa-

liyhtälömenetelmällä erilaisista DB-reunaehdon toteuttavista kappaleista ja tuloksia on verrattu sirontaan ideaalijohtavista kappaleista. Sirontaa on tarkastelu bistaattisen tutkapoikkipinnan kannalta, mikä kuvaa kappaleen kykyä sirottaa tutkan signaalia tiettyyn suuntaan. Bistaattista tutkapoikkipintaa kutsutaan usein myös sirontapoikkipinnaksi. DB-kappaleille lasketaan myös polarisoituvuus, joka kuvaa herättävän kentän ja sen indusoiman dipolimomentin suhdetta. Polarisoituvuus on erittäin mielenkiintoinen suure tutkittaessa aineen sähkömagneettisia ominaisuuksia. Lisäksi työssä on tarkasteltu ekvivalenttien pintavirtatiheyksien käyttäytymistä DB-pinnalla. Erityisesti on kiinnitetty huomiota terävien kiilojen aiheuttamiin singulaarisiin pintavirtatiheyksiin.

2 Sähkömagneettisen sironnan teoriaa

Tässä kappaleessa käsitellään sähkömagneetiikan teoriaa, mitä tarvitaan sirontatehtävien ratkaisemiseen. Ensiksi esitellään Maxwellin yhtälöt, joiden avulla sirontatehtävä saadaan matemaattiseen muotoon. Sirontatehtävän yksikäsitteiseen ratkaisuun vaadittavat yleisimmät reuna- ja rajapintaehdot on esitelty. Lisäksi tässä kappaleessa tarkastellaan kenttien käyttäytymistä terävässä kiilassa.

2.1 Maxwellin yhtälöt

Mikä tahansa sähkömagneettisiin kenttiin liittyvä ongelma makroskooppisessa mitakaavassa voidaan ratkaista käyttäen Maxwellin yhtälöitä yhdessä väliaine yhtälöiden ja Lorentzin voiman kanssa. Maxwellin yhtälöt koostuvat neljästä eri yhtälöstä, jotka esitettynä differentiaali muodossa ajan t ja paikan \mathbf{r} funktiona ovat

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t) \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho_s(\mathbf{r}, t) \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (4)$$

missä \mathbf{E} on sähkökentän voimakkuus $[V/m]$, \mathbf{B} on magneettivuontiheys $[T]$, \mathbf{D} on sähkövuontiheys $[As/m^2]$, \mathbf{H} on magneettikentän voimakkuus $[A/m]$, \mathbf{J}_s on lähdevirtatiheys $[A/m^2]$ ja ρ_s on lähdevaraustiheys $[C/m^3]$. Väliaine yhtälöt yhdistävät kenttien voimakkuudet vuontiheyksiin

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon(\mathbf{r}, t, \mathbf{E})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu(\mathbf{r}, t, \mathbf{H})\mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (6)$$

missä ϵ on sähköinen permittiivisyys ja μ on magneettinen permeabiilisuus. Jos väliaine on lineaarista, homogeenista ja isotrooppista, nämä parametrit ovat vakioita. Muussa tapauksessa ne voivat riippua paikasta, taajuudesta ja itse kentistä. Lorentzin voima kuvaa varatun hiukkasen liikettä sähkö- ja magneettikentässä

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)), \quad (7)$$

missä q on hiukkasen varaus ja \mathbf{v} on nopeusvektori. Lisäksi jatkuvuusehto yhdistää lähdevirran lähdevarauksiin

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \rho_s(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (8)$$

joka saadaan ottamalla divergenssi yhtälöstä (2) ja käyttämällä yhtälöä (3).

Yhtälöä (1) kutsutaan Faradayn laiksi ja siitä nähdään, että ajan mukaan muuttuva magneettikenttä aiheuttaa pyörteisen sähkökentän. Ampère-Maxwellin lain (2) mukaan virta, tai ajan mukaan muuttuva sähkökenttä, aiheuttaa magneettikentän pyörteen. Näistä yhtälöistä huomataan, että ajan mukana muuttuvat sähkö- ja magneettikentät ylläpitävät toisiaan, joten sähkömagneettisten kenttien on mahdollista edetä tyhjässä avaruudessa. Gaussin lait varauksille eli yhtälöt (3) ja (4) kertovat, että on olemassa sähköisiä varauksia mutta magneettisia varauksia ei ole olemassa.

Maxwellin yhtälöitä voidaan hieman yksinkertaistaa olettamalla kenttien aikariippuvuus sinimuotoiseksi eli tarkastelemalla aikaharmonisia signaaleita. Sinimuotoinen funktio voidaan esittää kompleksilukuna

$$f(t) = f e^{-i\omega t}, \quad (9)$$

missä i on imaginääriyksikkö eli $\sqrt{-1}$ ja f on kompleksiluku $f = f_{re} + i f_{im}$. Kompleksiesityksestä reaalesitykseen päästään yksinkertaisesti ottamalla reaaliosa funktiosta

$$F(t) = \Re(f e^{-i\omega t}). \quad (10)$$

Kompleksiesityksen etuna on se, että ajan suhteen derivointi kohdistuu ainoastaan termiin $e^{-i\omega t}$, jolloin derivointi operaatiosta tulee algebrallinen operaatio

$$\frac{\partial}{\partial t}(f e^{-i\omega t}) = -i\omega f e^{-i\omega t}. \quad (11)$$

Eksponttifunktio $e^{-i\omega t}$ esiintyy tekijänä kaikissa kenttä- ja lähdefunktioissa, joten se voidaan jättää kirjoittamatta. Näin ollen aikaharmoniset Maxwellin yhtälöt voidaan kirjoittaa muodossa

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (12)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_s(\mathbf{r}) \quad (14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \quad (15)$$

Aikaharmonisessa tilanteessa jatkuvuusehto (8) tulee muotoon

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) = i\omega\rho_s(\mathbf{r}). \quad (16)$$

Maxwellin yhtälöistä voidaan tehdä symmetriset olettamalla niin sanottujen magneettisten varausten m_s olemassaolo. Magneettisia varauksia ei nykytiedon mukaan ole olemassa mutta laskennan kannalta magneettiset varaukset voidaan ottaa mukaan matemaattisina apusuureina. Näin ollen syntyy myös magneettinen lähdevirtaiteus \mathbf{M}_s . Symmetriset Maxwellin yhtälöt voidaan esittää muodossa

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{M}_s(\mathbf{r}) \quad (17)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega\mathbf{D}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_s(\mathbf{r}) \quad (19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = m_s(\mathbf{r}). \quad (20)$$

Lisäksi saadaan jatkuvuusehto magneettiselle virtaiteydelle ja varaustiheydelle

$$\nabla \cdot \mathbf{M}_s(\mathbf{r}) = i\omega m_s(\mathbf{r}). \quad (21)$$

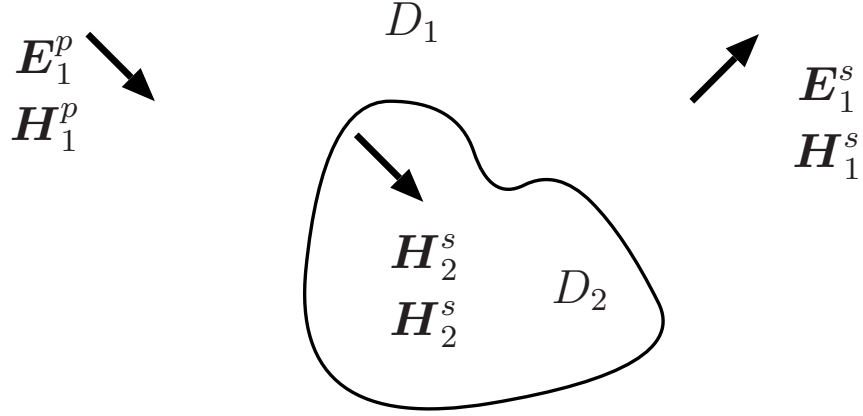
2.2 Sirontatehtävän matemaattinen formulointi

Sirontatehtävällä tarkoitetaan tehtävää, missä halutaan ratkaista mielivaltaisesta kappaleesta sironneet sähkö- ja magneettikentät \mathbf{E}_1^s ja \mathbf{H}_1^s , kun tunnetaan herättävät kentät eli primäärikentät \mathbf{E}_1^p ja \mathbf{H}_1^p . Sirontatehtävää voidaan lähteä tarkastelemaan eri alueissa olevien kenttien avulla. Oletetaan, että D_2 on homogeeninen sirottaja alueessa D_1 , jonka permittiivisyys ϵ_2 ja permeabiilisuus μ_2 ovat vakioita. Lisäksi oletetaan, että alueen D_1 permittiivisyys ϵ_1 ja permeabiilisuus μ_1 ovat myös vakioita eli väliaine on lineaarinen, homogeeninen ja isotrooppinen. Kuvassa 1 nähdään yksinkertainen esitys sirontatehtävästä.

Sirontatehtävä voidaan formuloida Maxwellin yhtälöiden reuna-arvo-ongelmaksi, missä tarkoituksena on hakea sekundäärikentät tunnetuille primäärikentille siten, että ne toteuttavat yhtälöt

$$\nabla \times \mathbf{E}_j^s(\mathbf{r}) = i\omega\mu_j(\mathbf{r})\mathbf{H}_j^s(\mathbf{r}) \quad (22)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_j^s(\mathbf{r}) = -i\omega\epsilon_j(\mathbf{r})\mathbf{E}_j^s(\mathbf{r})$$



Kuva 1: Sironnatehtävän geometria. Homogeeninen sirottaja D_2 on alueessa D_1 , ja tarkoituksena on ratkaista sironneet kentät \mathbf{E}_1^s ja \mathbf{H}_1^s , kun tunnetaan herättävät kentät \mathbf{E}_1^p ja \mathbf{H}_1^p .

alueissa D_1 ja D_2 , missä $j = 1, 2$. Kokonaiskenttien alueessa D_1 on oltava herättävien ja sironneiden kenttien summia

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1^t &= \mathbf{E}_1^p + \mathbf{E}_1^s \\ \mathbf{H}_1^t &= \mathbf{H}_1^p + \mathbf{H}_1^s\end{aligned}\tag{23}$$

ja alueessa D_2 kokonaiskentät ovat

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_2^t &= \mathbf{E}_2^s \\ \mathbf{H}_2^t &= \mathbf{H}_2^s.\end{aligned}\tag{24}$$

Lisäksi kenttien on toteutettava jokin reunaehto tai rajapintaehto eri alueiden rajalla, jolloin differentiaaliyhtälöiden ratkaisusta saadaan yksikäsitteinen. Sironneiden kenttien on myös toteutettava säteilyehto eli sähkömagneettisen energian on mentävä nollaan äärettömyydessä

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} |\mathbf{r}| \left(\sqrt{\mu_1} \mathbf{H}_1^s(\mathbf{r}) \times \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} - \sqrt{\epsilon_1} \mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}) \right) = 0.\tag{25}$$

2.3 Reuna- ja rajapintaehdot

Kuten aikaisemmin on mainittu, kenttien on toteutettava sekä edellä mainitut differentiaaliyhtälöt että reuna- tai rajapintaehdot yksikäsitteisen ratkaisun saamiseksi. Tässä kappaleessa esitellään rajapintaehdot ja muutamia yleisesti tunnettuja reunaehtoja mukaanlukien DB-reunaehto.

Oletetaan tilanne, missä sähkömagneettinen aalto tulee kahden väliaineen rajapintaan. Oletetaan lisäksi, että väliaineessa 1 ϵ_1 ja μ_1 ovat vakioita ja väliaineessa 2 ϵ_2 ja μ_2 ovat myös vakioita.

Symmetrisista Maxwellin yhtälöistä (17) - (20) voidaan johtaa ehdot kahden väliaineen rajapinnalla oleville kentille ja vuontiheyksille ja ne voidaan esittää seuraavasti

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 = \rho_s \quad (26)$$

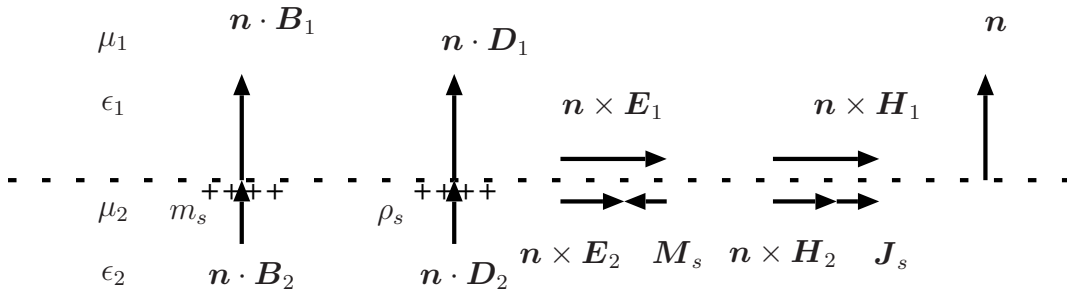
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2 = m_s \quad (27)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 - \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = -\mathbf{M}_s \quad (28)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_s, \quad (29)$$

missä \mathbf{n} on pinnan yksikkönormaalivektori ja se osoittaa väliaineeseen 1.

Yhtälöistä nähdään, että magneettinen pintavaraustiheys aiheuttaa magneettivuontiheyden pinnan normaalin suuntaisen komponentin epäjatkuvuuden. Epäjatkuvuus sähkövuontiheyden normaalikomponentissa puolestaan vastaa sähköistä pintavaraustiheyttä ρ_s kyseisessä pisteessä. Vastaavasti sähkökentän tangenttikomponentin epäjatkuvuudesta aiheutuu magneettinen pintavirtatiheys \mathbf{M}_s , ja magneettikentän tangenttikomponentin epäjatkuvuus aiheuttaa sähköisen pintavirtatiheyden \mathbf{J}_s .



Kuva 2: Kenttien ja vuontiheyksien käyttäytyminen kahden aineen rajapinnalla.

Ideaalisen eristeen tapauksessa pintavaraustiheydet $\rho_s = m_s = 0$ ja pintavirtatiheydet $\mathbf{J}_s = \mathbf{M}_s = 0$, jolloin sähkö- ja magneettivuontiheyden normaalikomponentit ovat jatkuvia pinnan läpi. Sähkö- ja magneettikenttien tangenttikomponentit ovat myös jatkuvia pinnan läpi.

Sähkömagneettiset ongelmat voidaan myös ratkaista yksikäsitteisesti käyttämällä sopivaa reunaehtoja rajapintaehdojen sijaan. Reunaehto eroaa rajapintaehdoista siinä, että reunan sisäosat eivät vaikuta mitenkään ratkaistavaan ongelmaan, kun taas kahden alueen rajapinnalla kentät täytyy ratkaista molemmissa alueissa.

Yksi tunnetuimmista reunaehdoista on ideaalisen sähköisen johteen reunaehto eli niin sanottu PEC-reunaehto (Perfect Electric Conductor). Ideaalinen sähköinen johde tarkoittaa sitä, että johdekappaleen sähköjohtavuus σ on ääretön, jolloin kappaleen pinnalla tangentialinen sähkökenttä häviää eli

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0. \quad (30)$$

PEC-reunaehto voidaan toteuttaa väliaineella, jonka permittiivisyys $\epsilon \rightarrow \infty$ ja permeabilisuus $\mu \rightarrow 0$. Tiedetyt metallit näyttävät toteuttavan PEC-reunaehdon matallilla taajuuksilla, joten PEC-reunaehtoä käytetään usein mallinnettaessa metallisia kappaleita. Todellisessa tilanteessa tangentialinen sähkökenttä ei ole kuitenkaan täysin nolla, vaan kenttää tunkeutuu hieman metallin sisään.

Esitellään seuraavaksi PMC-reunaehto (Perfect Magnetic Conductor) eli ideaalinen magneettinen johde, jonka pinnalla tangentialinen magneettikenttä häviää

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0. \quad (31)$$

PMC-reuna voidaan toteuttaa kahden väliaineen rajapinnalla, missä $\mu \rightarrow \infty$ ja $\epsilon \rightarrow 0$. Ratkaisuja PMC-reunan toteutukseen on esitetty viitteessä [8].

PEC- ja PMC-reunaehdot voidaan esittää yleisemmän PEMC-reunaehdon (Perfect Electromagnetic Conductor) [9] avulla

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H} + M\mathbf{E}) = 0, \quad (32)$$

missä M on skalaarinen parametri. PEC-reunaehto saadaan kun $M \rightarrow \infty$ ja PMC kun $M \rightarrow 0$. PEMC-reunaehdon realisoinnista on puhuttu viitteessä [10].

Lähteettömällä reunaehdolla tarkoitetaan reunaehto, missä ekvivalentit sähköiset ja magneettiset pintavirtatiheydet ($\mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$, $\mathbf{M} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}$) ovat divergenssittömiä kappaleen pinnalla eli

$$\begin{aligned} \nabla_s \cdot \mathbf{J} &= 0 \\ \nabla_s \cdot \mathbf{M} &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Tämä tarkoittaa, että virtojen on muodostuttava silmukoista, koska virroilla ei sallita olevan lähteitä. Kyseinen reunaehto tunnetaan myös nimellä DB-reunaehto, koska se voidaan esittää sähkö- ja magneettivuontiheyksien avulla. Koska

$$\begin{aligned} \nabla_s \cdot \mathbf{J} &= i\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \nabla_s \cdot \mathbf{M} &= i\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

havaitaan, että sähkö- ja magneettivuontiheyksien normaalikomponentit häviävät pinnalla, jos $\omega \neq 0$. Näin ollen DB-reunaehto voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Jos väliaine on lineaarista, isotrooppista ja homogeenista, myös sähkö- ja magneettikenttien normaalikomponentit häviävät pinnalla

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} &= 0.\end{aligned}\tag{36}$$

DB-reunaehto voidaan saada aikaan uniaksiaalisen anisotrooppisen väliaineen rajapinnalla. Oletetaan, että kahden väliaineen rajapinta on tasossa $z = 0$. Olkoon väliaineparametrit ϵ ja μ vakioita pinnan toisella puolella ja toisella puolella

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon} &= \epsilon_z \mathbf{u}_z \mathbf{u}_z + \epsilon_t \bar{\mathbf{I}}_t \\ \bar{\mu} &= \mu_z \mathbf{u}_z \mathbf{u}_z + \mu_t \bar{\mathbf{I}}_t,\end{aligned}\tag{37}$$

missä

$$\bar{\mathbf{I}}_t = \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y.\tag{38}$$

Vaativalla z -suuntaisten parametrien häviäminen $\epsilon_z \rightarrow 0$ ja $\mu_z \rightarrow 0$, DB-reunaehto on voimassa, koska sähkö- ja magneettivuon normaalikomponentit ovat jatkuvia rajapinnan läpi. Tällainen väliaine voi olla mahdollista rakentaa kerrosmaisella rakenteella, missä väliaineparametrit vaihtelevat vuorottain positiivisesta negatiiviseksi [4].

Akustiikassa on määritelty niin sanotut pehmeä ja kova pinta (soft surface, hard surface). Samanlaiset pinnat voidaan määritellä myös sähkömagneettisille kentille [11]. Pehmeällä pinnalla tarkoitetaan pintaa, missä pintaa pitkin etenevä tehotiheys on nolla. Toisin sanoen Poyntingin vektori pinnalla on nolla. Jos Poyntingin vektori saa maksimi arvonsa pinnalla, puhutaan kovasta pinnasta. Tällaisia pintoja pystytään valmistamaan esimerkiksi korrugoiduilla rakenteilla ja niitä käytetään hyvin paljon esimerkiksi torviantenneissa symmetrisen säteilykuvion saamiseksi.

Keskimääräinen etenevä tehotiheys määritellään kompleksisen Poyntingin vektorin aikakeskiarvon reaaliolosana

$$\langle S(t) \rangle = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \},\tag{39}$$

missä \mathbf{H}^* magneettikentän \mathbf{H} kompleksikonjugaatti. Tarkastellaan Poyntingin vektorin pinnan suuntaista komponenttia ottamalla siitä ristitulo pinnan normaalivektorin kanssa. Pehmeän pinnan tapauksessa pätee yhtälö

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})^* - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{H}^* = 0.\tag{40}$$

Huomataan, että yhtälö (40) toteutuu, jos kappale toteuttaa DB-reunaehdon ja väliaine on isotrooppista ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$). Näin ollen DB-pinta on pehmeä pinta.

2.4 Kenttien käyttäytyminen terävässä kiilassa

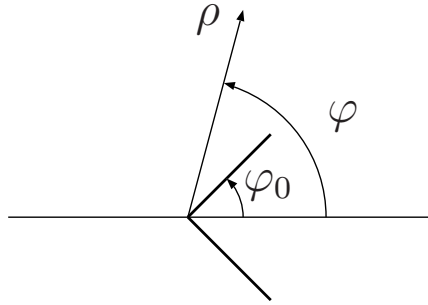
Monissa fysikaalisissa kappaleissa esiintyy teräviä kiiloja ja kulmia, joilla on suuri vaikutus kappaleiden sirontaominaisuuksiin. Esimerkiksi kuution tapauksessa kuution särmät muodostavat 90 asteen kiiloja. Kiilaa voidaan pitää terävänä, jos sen kaarevuussäde on paljon pienempi kuin aallonpituus. Terävän kiilan tapauksessa kiilan pinnalla olevat sähkö- ja magneettikentät saattavat olla singulaarisia, eli näiden amplitudit kasvavat kohti ääretöntä lähestyttäessä kiilan terävää reunaa. Tässä kappaleessa tarkastellaan analyttisesti kenttien käyttäytymistä terävässä kiilassa.

Virtojen käyttäytymistä kiilan terävän kärjen lähellä voidaan analysoida statiikan avulla, koska mentäessä riittävän lähelle kiilan kärkeä tilanne näyttää staattiselta. Kenttien käyttäytymistä ideaalijohtavissa ja dielektrisissä kiiloissa on analysoitu kirjallisuudessa [12], [13]. Tehdään samantyyppinen analyysi DB-kiilalle.

Oletetaan tilanne, missä DB-reunaehdon toteuttava kiila on homogeenisessa, isotrooppisessa ja lineaarisessa väliaineessa. Potentiaalifunktio ϕ kiilan ulkopuolella toteuttaa Laplacen yhtälön

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (41)$$

Asetetaan kiila napakoordinaatistoon siten, että terävä kulma on origossa ja kiilan sivut ovat kulmassa $\varphi = \varphi_0$ ja $\varphi = -\varphi_0$ kuvan 3 tapaan.



Kuva 3: Suorakulmainen kiila napakoordinaatistossa. Terävä kulma on origossa ja kiilan sivut ovat kulmassa $\varphi = \varphi_0$ ja $\varphi = -\varphi_0$.

Laplacen yhtälö esitettynä napakoordinaatistossa on

$$\nabla^2 \phi(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (42)$$

Yhtälö (42) on separoituva, joten ratkaisua voidaan lähteä hakemaan sarjamuodossa

$$\phi(\rho, \varphi) = \sum_n P_n(\rho) \Phi_n(\varphi). \quad (43)$$

Sijoittamalla sarjan (43) yleinen termi yhtälöön (42) saadaan separoitu yhtälö

$$\frac{\rho}{P_n(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial P_n(\rho)}{\partial \rho} \right) = - \frac{1}{\Phi_n(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi_n(\varphi)}{\partial \varphi^2}. \quad (44)$$

Yhtälö (44) voidaan hajoittaa kahdeksi erilliseksi differentiaaliyhtälöksi

$$\frac{\partial^2 \Phi_n(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \nu_n^2 \Phi_n(\varphi) = 0 \quad (45)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial P_n(\rho)}{\partial \rho} \right) - \nu_n^2 P_n(\rho) = 0, \quad (46)$$

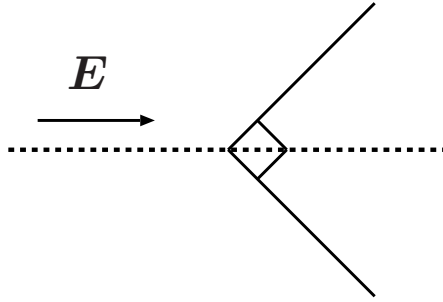
missä ν_n on jokin vakio.

Ylläolevien differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut ovat muotoa

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \sin(\nu_n \varphi) + B_n \cos(\nu_n \varphi) \quad (47)$$

$$P_n(\rho) = C_n \rho^{\nu_n} + D_n \rho^{-\nu_n}. \quad (48)$$

Kertoimien D_n täytyy olla nollia, jotta ratkaisu olisi fysikaalinen, koska negatiivinen potenssi johtaa äärettömään energiaan origossa. Nyt potentiaalfunktio voidaan esittää erikseen symmetrisessä tilanteessa ja antisymmetrisessä tilanteessa tason $\varphi = 0$ suhteen. Yleinen kenttä saadaan näiden kahden tilanteen lineaariyhdisteenä.



Kuva 4: Symmetrinen tilanne. Kiila on symmetrinen herättävään kenttään \mathbf{E} nähden.

Symmetrisessä tilanteessa herättävä kenttä on $\varphi = 0$ suuntainen, jolloin potentiaalfunktio voidaan esittää muodossa

$$\phi(\rho, \varphi) = B_n \rho^{\nu_n} \cos(\nu_n(\pi - \varphi)), \quad \text{jos } \varphi_0 \leq \varphi \leq 2\pi - \varphi_0. \quad (49)$$

Sähkökenttä saadaan ottamalla gradientti potentiaalifunktiosta

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi) = -\nabla\phi(\rho, \varphi) = -\mathbf{u}_\rho B_n \nu_n \rho^{\nu_n-1} \cos(\nu_n(\pi - \varphi)) - \mathbf{u}_\varphi B_n \rho^{\nu_n-1} \nu_n \sin(\nu_n(\pi - \varphi)). \quad (50)$$

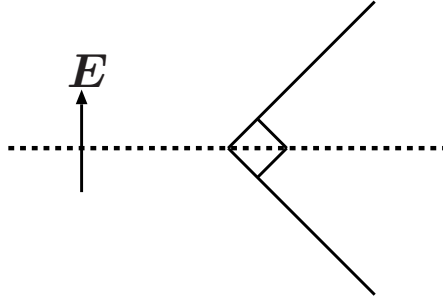
Tarkastellaan tilannetta suorakulmaisen DB-kiilan pinnalla, jolloin $\varphi = \frac{\pi}{4}$ tai $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ ja $\mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{E} = 0$. Sijoittamalla nämä ehdot kentän lausekkeeseen saadaan yhtälö

$$B_n \rho^{\nu_n-1} \nu_n \sin(\nu_n \frac{3\pi}{4}) = 0, \quad (51)$$

joka toteutuu kun

$$\nu_n = \frac{4}{3}n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (52)$$

Kentät ovat singulaarisia, jos parametrin ν pienin positiivinen arvo on pienempi kuin yksi eli $0 < \nu < 1$. Symmetrissä tapauksessa ν on suurempi kuin 1, joten kentät eivät ole singulaarisia.



Kuva 5: Antisymmetrinen tilanne.

Antisymmetrisessä tapauksessa kenttä on $\varphi = \frac{\pi}{2}$ suuntainen, joten potentiaali voidaan esittää muodossa

$$\phi(\rho, \varphi) = A_n \rho^{\nu_n} \sin(\nu_n(\pi - \varphi)), \quad \text{jos } \varphi_0 \leq \varphi \leq 2\pi - \varphi_0 \quad (53)$$

ja sähkökentäksi saadaan

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi) = -\nabla\phi(\rho, \varphi) = -\mathbf{u}_\rho A_n \nu_n \rho^{\nu_n-1} \sin(\nu_n(\pi - \varphi)) + \mathbf{u}_\varphi A_n \rho^{\nu_n-1} \nu_n \cos(\nu_n(\pi - \varphi)). \quad (54)$$

Soveltamalla DB-reunaehto saadaan yhtälö

$$A_n \rho^{\nu_n-1} \nu_n \cos(\nu_n(\frac{3\pi}{4})) = 0, \quad (55)$$

joka toteutuu kun

$$\nu_n = \frac{2}{3}n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (56)$$

Nyt huomataan, että $\nu < 1$ kun $n = 1$, joten kentät ovat singulaarisia lähellä kulmaa. Sijoittamalla parametri ν kentän yhtälöön, nähdään että kentän voimakkuus on verrannollinen termiin $\rho^{-\frac{1}{3}}$. Ekvivalentti magneettinen pintavirtatiheys saadaan normaalivektorin ja sähkökentän ristitulona, joten myös tämä on singulaarinen. Tekemällä samanlainen analyysi magneettikentälle, huomataan sekä magneettikentän että sähköisen pintavirtatiheyden olevan singulaarisia antisymmetrisessä tapauksessa. Kannattaa myös huomata, että voimakkain singulaarisuus on samansuuruinen kuin ideaalijohtavan kulman tapauksessa.

2.5 Sirontaa kuvaavat suureet

Tässä kappaleessa esiteellään suureita, joiden avulla voidaan kuvata kappaleiden sirontaominaisuuksia. Tunnetuin sirontaa kuvaava suure lienee tutkapoikkipinta, joka kuvaa kappaleen kykyä näkyä tutkassa. Lisäksi esitellään polarisoituvuus, jonka avulla voidaan kuvata kappaleen sirontaominaisuuksia matalalla taajuudella.

2.5.1 Tutkapoikkipinta

Tutkapoikkipinta on suure, joka kuvaa kohteen kykyä sirottaa tutkan signaalia kohti tutkan vastaanotinta. Vastaanotin voi sijaita eri paikassa kuin lähetin, jolloin kyseessä on bistaattinen tutka tai niiden ollessa samassa paikassa, puhutaan monostaattisesta tutkasta. Suurin osa maailman tutkista on monostaattisia, joten useasti tutkapoikkipinnalla tarkoitetaan kohteen takaisinsironnasta laskettua tutkapoikkipintaa. Bistaattisesta tutkapoikkipinnasta käytetään usein nimitystä sirontapoikkipinta.

Tutkapoikkipinta eli RCS (Radar cross section) määritellään

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4\pi r^2 |\mathbf{E}^s|^2}{|\mathbf{E}^p|^2}, \quad (57)$$

missä \mathbf{E}^s on sironnut sähkökenttä etäisyydellä r kohteesta ja \mathbf{E}^p on herättävä sähkökenttä.

Kappaleen sirontapoikkipintaan vaikuttavat kappaleen geometrinen poikkipinta, pinnan materiaali ja suuntaavuus. Suuntaavuudella tarkoitetaan tutkan suuntaan sironnutta tehotiheyttä verrattuna keskimääräiseen sironneeseen tehotiheyteen. On hyvä huomata, että suuntaavuus riippuu voimakkaasti kappaleen asennosta ja aallonpituudesta, koska pienikin muutos näissä voi aiheuttaa joko voimistavan tai heikentävän interferenssin. Tästä syystä myös sirontapoikkipinnalla on voimakas riippuvuus aallonpituudesta ja kappaleen asennosta.

Integroimalla sirontapoikkipintaa koko avaruuskulman yli saadaan kokonaissirontapoikkipinta. Jakamalla tämä suure sirottajan geometrisella poikkipinnalla saadaan suure nimeltä sirontatehokkuus, joka määritellään

$$Q_{sca} = \frac{\sigma_{sca}}{A} = \frac{1}{A} \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \sigma \, d\Omega, \quad (58)$$

missä A on geometrinen poikkipinta.

2.5.2 Staattinen polarisoituvuus

Statiikassa käytetään usein suuretta sähköinen polarisoituvuus α_e , joka kuvaa staattisen sähkökentän \mathbf{E}_{st} suhdetta sen aiheuttamaan dipolimomenttiin \mathbf{p}_e

$$\mathbf{p}_e = \alpha_e \mathbf{E}_{st}. \quad (59)$$

Vastaavasti staattinen magneettikenttä \mathbf{H}_{st} aiheuttaa magneettisen dipolimomentin

$$\mathbf{p}_m = \alpha_m \mathbf{H}_{st}, \quad (60)$$

missä α_m on magneettinen polarisoituvuus. Yleisesti ottaen polarisoituvuus on dyadi, mutta symmetrisille isotrooppisille ja homogeenisille kappaleille se on skalaari.

Määritellään vielä normalisoitu sähköinen ja magneettinen polarisoituvuus

$$\alpha_e^n = \frac{\alpha_e}{\epsilon} V = \frac{\mathbf{p}_e V}{\epsilon \mathbf{E}_{st}} \quad (61)$$

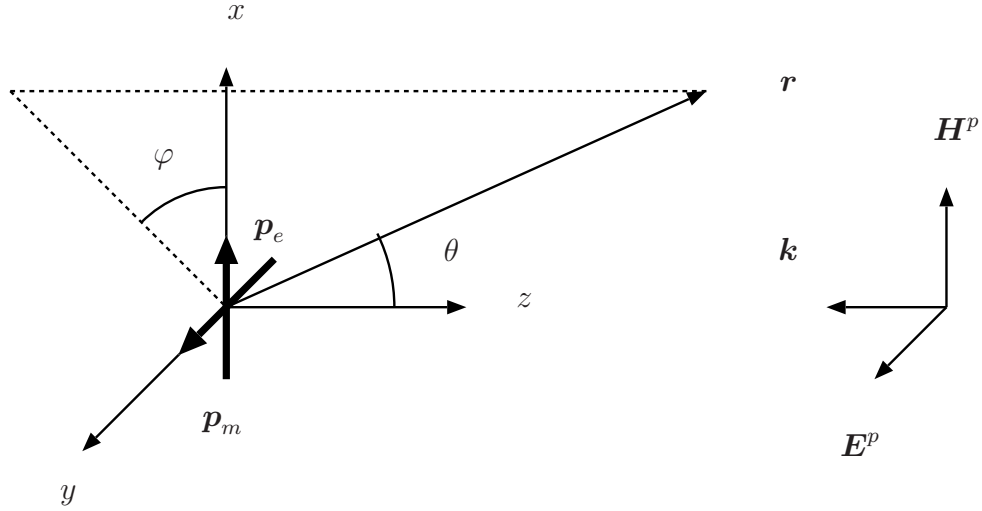
$$\alpha_m^n = \frac{\alpha_m}{\mu} V = \frac{\mathbf{p}_m V}{\mu \mathbf{H}_{st}}, \quad (62)$$

missä V on kappaleen tilavuus ja μ ja ϵ ovat väliaineparametrit kappaleen ulkopuolella.

Staattinen polarisoituvuus voidaan laskea numeerisesti tutkapoikkipinnan avulla [14], koska riittävän matalilla taajuuksilla sironnut sähkökenttä voidaan laskea Hertzin dipolin kaukokentästä. Oletetaan, että hyvin matalataajuinen lineaarisesti polarisoitunut tasoaalto etenee $-z$ -akselin suuntaan kuvan 6 esittämällä tavalla. Lisäksi hyvin pieni symmetrinen DB-kappale sijaitsee origossa.

Origossa oleva symmetrinen DB-kappale voidaan korvata y -akselin suuntaisella sähköisellä dipolilla \mathbf{p}_e ja x -akselin suuntaisella magneettisella dipolilla \mathbf{p}_m , koska tilanne näyttää kappaleen kannalta staattiselta. Sähköisen dipolin aiheuttama sähkökenttä $\mathbf{E}_{\mathbf{p}_e}^s$ kaukana dipolista voidaan laskea kaavalla [15]

$$\mathbf{E}_{\mathbf{p}_e}^s(r, \theta, \varphi) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \omega^2 \mu \mathbf{p}_e \times \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_r, \quad (63)$$



Kuva 6: Origossa sijaitsevaan pieneen symmetriseen DB-kappaleeseen syntyy sähköinen dipolimomentti \mathbf{p}_e ulkoisen sähkökentän \mathbf{E}^p johdosta, ja ulkoinen magneettikenttä \mathbf{H}^p synnyttää magneettisen dipolimomentin \mathbf{p}_m .

missä \mathbf{r} on tarkastelupisteen paikkavektori, \mathbf{u}_r on vektorin \mathbf{r} suuntainen yksikkövektori ja r on vektorin \mathbf{r} pituus. Yksikkövektori \mathbf{u}_r voidaan myös esittää muodossa $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_x \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{u}_y \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{u}_z \cos \theta$. Vastaavasti magneettisen dipolin aiheuttama sähkökenttä $\mathbf{E}_{\mathbf{p}_m}^s$ on

$$\mathbf{E}_{\mathbf{p}_m}^s(r, \theta, \varphi) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \omega k \mathbf{p}_m \times \mathbf{u}_r. \quad (64)$$

Dipolien aiheuttama kokonaissähkökenttä \mathbf{E}^s saadaan summaamalla yhtälöt (63) ja (64). Tarkastelemalla eteenpäinsironnutta sähkökenttää, eli tilannetta missä kulma $\theta = \pi$, saadaan kokonaissähkökentälle yhtälö

$$\mathbf{E}^s(r, 180, \varphi) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} (\omega^2 \mu |\mathbf{p}_e| \mathbf{u}_y \times (-\mathbf{u}_z) \times (-\mathbf{u}_z) - \omega k |\mathbf{p}_m| \mathbf{u}_x \times -(\mathbf{u}_z)). \quad (65)$$

Dipolimomentit on synnytetty tasoaallolla, joten sähkö- ja magneettikenttien amplitudeilla on yhteys $|\mathbf{E}^p| = \eta |\mathbf{H}^p|$, missä η on aaltoimpedanssi. Käyttämällä tätä hyväksi ja yhtälöitä (61) ja (62) saadaan kokonaissähkökenttä esitettyä muodossa

$$\mathbf{E}^s = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} k V |\mathbf{E}^i| (\alpha_e^n + \alpha_m^n) \mathbf{u}_y. \quad (66)$$

Sijoittamalla yhtälö (66) tutkapoikkipinnan määritelmään (57) saadaan yhtälö

$$|\alpha_e^n + \alpha_m^n| = \frac{\sqrt{4\pi\sigma}}{k^2 V}. \quad (67)$$

Symmetriselle DB-kappaleelle sähköinen ja magneettinen polarisoituvuus ovat yhtäsuuria, koska DB-reunaehto on symmetrinen. Näin ollen sähköinen ja magneettinen polarisoituvuus voidaan laskea eteenpäinsironneen tutkapoikkipinnan σ avulla

$$|\alpha_e^n| = |\alpha_m^n| = \frac{\sqrt{\pi\sigma}}{k^2 V}, \quad (68)$$

jos taajuus on riittävän matala.

3 Pintaintegraaliyhtälöt

Tässä kappaleessa johdetaan yleiset integraaliyhtälöt, joita voidaan käyttää sirontatehtävän ratkaisemiseen. Lisäksi esitellään ekvivalenssiperiaate, jonka avulla muodostetaan integraaliesitykset PEC- ja DB-kappaleen sirontatehtäville.

Lineaarille, homogeenille ja isotrooppiselle väliaineelle lähdevirtatiheyksien aiheuttamat kentät voidaan ratkaista vektorimuotoisista Helmholtzin yhtälöistä, jotka saadaan ottamalla roottorit yhtälöistä (17) ja (18)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) - \nabla \times \mathbf{M}_s(\mathbf{r}), \quad (69)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = i\omega\epsilon \mathbf{M}_s(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{J}_s(\mathbf{r}), \quad (70)$$

missä $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ on aaltoluku. Oletetaan, että ylläolevat yhtälöt halutaan ratkaista alueessa, joka sisältää sekä lähteitä että alueita, missä väliaineparametrit eroavat toisistaan.

Esitellään ensiksi vapaan tilan Greenin funktio

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (71)$$

missä \mathbf{r}' on lähdepiste ja \mathbf{r} on tarkastelupiste. Greenin funktio on skalaarisen Helmholtzin yhtälön perusratkaisu eli se toteuttaa yhtälön

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (72)$$

missä δ on deltafunktio

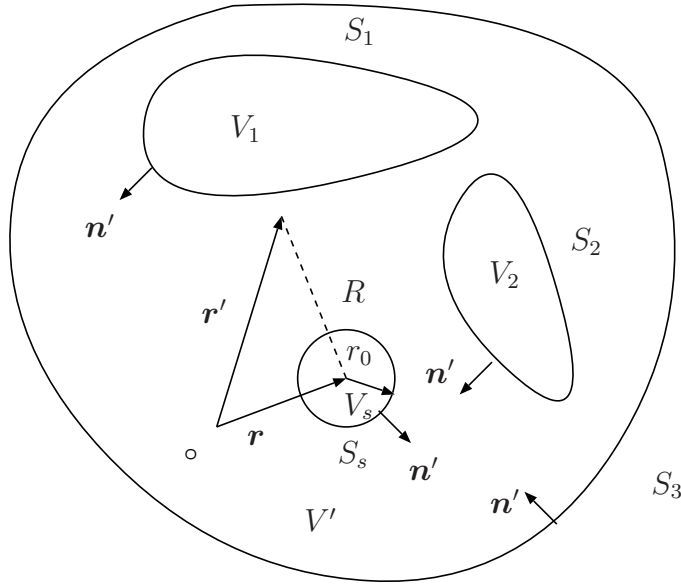
$$\int \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u(\mathbf{r}') dV' = u(\mathbf{r}). \quad (73)$$

Oletetaan tilanne, missä lähdepiste \mathbf{r}' on alueessa V tai pinnalla $\Sigma = S_1 + S_2 + S_3$, joka on alueen V pinta kuvan 7 tapaan, ja kenttäpiste \mathbf{r} on missä tahansa avaruuden pisteessä. Vektori \mathbf{n}' on pinnan Σ yksikkönormaali, joka osoittaa tilavuuteen V .

Greenin teoreeman mukaan yhtälö

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{Q} \cdot \nabla' \times \nabla' \times \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \nabla' \times \nabla' \times \mathbf{Q}) dV' \\ &= - \int_{\Sigma} (\mathbf{P} \times \nabla' \times \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \times \nabla' \times \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n}' dS \end{aligned} \quad (74)$$

on voimassa, jos vektorifunktioiden \mathbf{P} ja \mathbf{Q} ensimmäiset ja toiset derivaatat ovat jatkuvia pinnalla Σ .



Kuva 7: Singulaarisuusongelma voidaan poistaa muodostamalla uusi alue V_s siten, että kenttäpiste \mathbf{r} on sen sisällä, jolloin kenttäpiste ja lähdepiste \mathbf{r}' ovat aina eri alueissa.

Valitaan vektorifunktiot \mathbf{P} ja \mathbf{Q} siten, että

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathbf{E}(\mathbf{r}') \\ \mathbf{Q} &= \hat{\mathbf{a}}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),\end{aligned}\tag{75}$$

missä $\hat{\mathbf{a}}$ on mielivaltaiseen suuntaan osoittava vakiovektori. Näitä valintoja ei kuitenkaan voida suoraan sijoittaa Greenin teoreemaan, jos $\mathbf{r} \in V$ tai $\mathbf{r} \in \Sigma$, koska Greenin funktion gradientti on voimakkaasti singulaarinen pisteessä $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Lisäksi sähkökenttä \mathbf{E} ei toteuta vaadittavia ehtoja, jos pinta ei ole sileä. Vektorifunktiot \mathbf{P} ja \mathbf{Q} voitaisiin valita myös muulla tavalla. Viitteessä [16] on esitetty muutamia vaihtoehtoisia tapoja valita funktiot \mathbf{P} ja \mathbf{Q} .

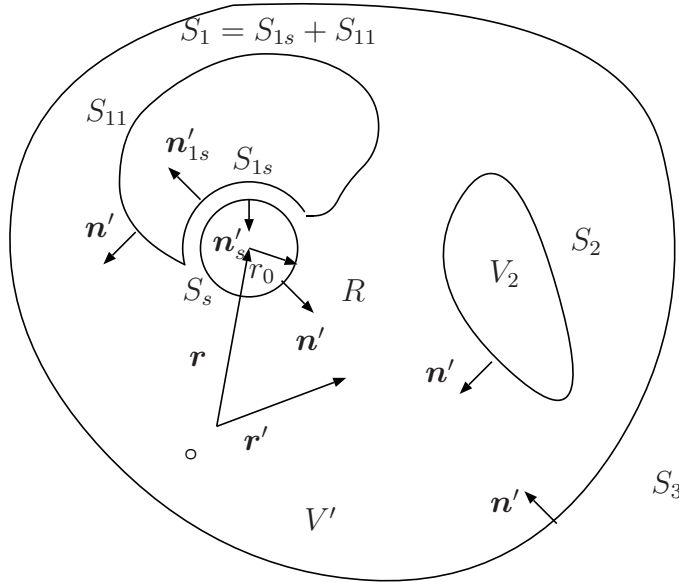
Singulaarisuusongelma voidaan poistaa muodostamalla uusi alue V_s , joka on r_0 -säteinen pallo, jonka keskipiste on pisteessä \mathbf{r} kuvan 7 mukaan [17]. Näin ollen alue V on korvattu alueella $V' = V - V_s$ ja pinta Σ on korvattu pinnalla $\Sigma' = \Sigma - S_s$. Nyt integraalit tilavuuden V' ja pinnan Σ' yli on hyvin määritelty, koska \mathbf{r} ei ole alueessa V' tai pinnalla Σ' . Integraalit alueen V_s ja pinnan S_s yli voidaan laskea erikseen.

Sijoittamalla \mathbf{E} ja $\hat{\mathbf{a}}\mathbf{G}$ Greenin teoreemaan ja käyttämällä hyväksi Maxwellin yhtälöitä (17-20) ja yhtälöitä (69) ja (70), saadaan pitkien vektorioperaatioiden jälkeen

[18] yhtälö

$$\begin{aligned}
 & \int_{V'} \left(i\omega\mu \mathbf{J}_s G - \mathbf{M}_s \times \nabla' G + \frac{\rho_s}{\epsilon} \nabla' G \right) dV' \\
 &= \int_{\Sigma'} (i\omega\mu(\mathbf{n}' \times \mathbf{H})G + (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}) \times \nabla' G + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E})\nabla' G) dS'.
 \end{aligned} \tag{76}$$

Tutkitaan tilannetta, missä kenttäpiste \mathbf{r} on pinnalla S_1 . Muodostetaan pinta S_1 uudestaan kuvan 8 mukaan siten, että $S_1 = S_{11} + S_{1s}$ ja pinta S_s on kiinni pinnassa S_{1s} . Vektorit \mathbf{n}'_s ja \mathbf{n}'_{1s} ovat pintojen S_s ja S_{1s} yksikkösisänormaalit pisteessä \mathbf{r}' .



Kuva 8: Jos kenttäpiste \mathbf{r} on pinnalla S_1 ja $\mathbf{r} - \mathbf{r}' \rightarrow 0$, pintaintegraali voidaan laskea korvaamalla pinta S_1 pinnoilla S_{11} ja S_{1s} .

Annetaan säteen r_0 lähestyä nollaa, jolloin kenttäpiste \mathbf{r} on äärettömän lähellä pintaa S_1 . Nyt pintaintegraali yhtälöstä (76) voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned}
 & \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left[\int_{S_s} + \int_{S_{1s}} + \int_{S_{11}} + \int_{S_2} + \int_{S_3} \right] \\
 & \times (i\omega\mu(\mathbf{n}' \times \mathbf{H})G + (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}) \times \nabla' G + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E})\nabla' G) dS'.
 \end{aligned} \tag{77}$$

Integraali pintojen S_s ja S_{1s} yli voidaan laskea pääarvomielessä. Greenin funktion gradientti on

$$\nabla' G = \frac{1 - ikR}{4\pi R^2} e^{ikR} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{R}. \tag{78}$$

Koska $R = r_0 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow 0$, voidaan vaihetermit unohtaa Greenin funktiosta ja sen gradientista. Näin ollen integraali pintojen S_s ja S_{1s} yli saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left[\int_{S_s} + \int_{S_{1s}} \right] \times (i\omega\mu(\mathbf{n}' \times \mathbf{H})G + (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}) \times \nabla'G + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E})\nabla'G) \, dS' \\ &= \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \int_{S_s} \frac{\mathbf{n}'_s \cdot \mathbf{n}'_s}{4\pi R^2} dS' + \mathbf{E}(\mathbf{r}) \int_{S_{1s}} \frac{\mathbf{n}'_{1s} \cdot \mathbf{n}'_{1s}}{4\pi R^2} dS' \right]. \end{aligned} \quad (79)$$

Avaruuskulman määritelmän mukaan

$$\int_{S_s} \frac{\mathbf{n}'_s \cdot \mathbf{n}'_s}{R^2} dS' \quad (80)$$

on pinnan S_s avaruuskulma, mikä näkyy pisteestä \mathbf{r} . Vastaavasti

$$\int_{S_{1s}} \frac{\mathbf{n}'_{1s} \cdot \mathbf{n}'_{1s}}{R^2} dS' \quad (81)$$

on pisteestä \mathbf{r} näkyvä pinnan S_{1s} avaruuskulma, joten integraali voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{I} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \left[1 - \frac{\Omega}{4\pi} \right], \quad (82)$$

missä

$$\Omega = \begin{cases} 2\pi, & \mathbf{r} \in \Sigma \\ 4\pi, & \mathbf{r} \in V_1 \\ 0, & \text{muualla.} \end{cases} \quad (83)$$

Jos \mathbf{r} on pinnalla Σ ja pinta ei ole sileä, kenttien pitää olla integroituvia [19]. Samanlainen tarkastelu voidaan tehdä kaikille pinnoille ja alueille, joten yhtälö (76) voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{\Omega}{4\pi} \right] \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \int_V (i\omega\mu \mathbf{J}_s G - \mathbf{M}_s \times \nabla'G + \frac{\rho_s}{\epsilon} \nabla'G) \, dV' \\ &- \int_{\Sigma} (i\omega\mu(\mathbf{n}' \times \mathbf{H})G + (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}) \times \nabla'G + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E})\nabla'G) \, dS', \end{aligned} \quad (84)$$

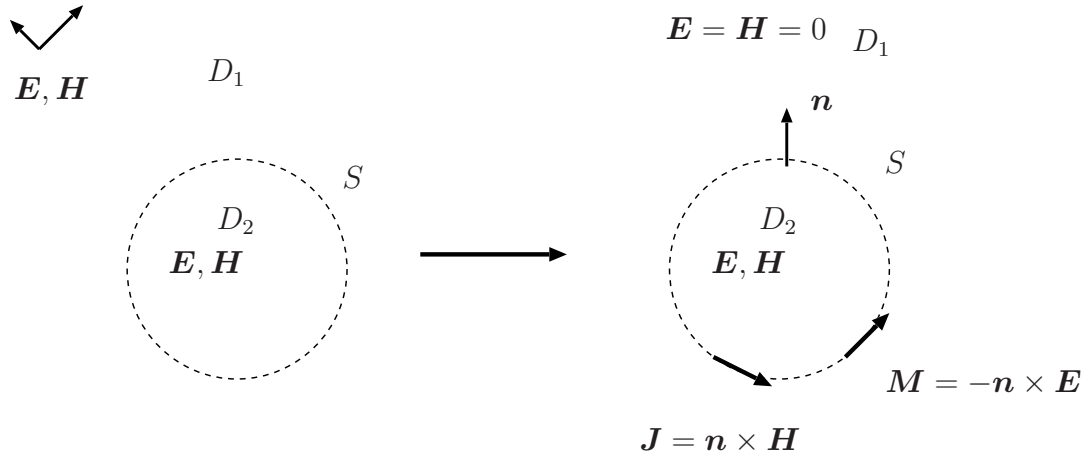
ja samalla tavalla magneettikentälle saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{\Omega}{4\pi} \right] \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \int_V \left(i\omega\epsilon \mathbf{M}_s G + \mathbf{J}_s \times \nabla'G + \frac{m_s}{\mu} \nabla'G \right) \, dV' \\ &- \int_{\Sigma} (-i\omega\epsilon(\mathbf{n}' \times \mathbf{E})G + (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \times \nabla'G + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{H})\nabla'G) \, dS'. \end{aligned} \quad (85)$$

Yhtälöt (84) ja (85) toteuttavat Maxwellin yhtälöt, jos sopivat jatkuvuusehdot [20] on voimassa.

3.1 Ekvivalenssiperiaate

Johdetaan seuraavaksi pintaintegraaliesitykset kentille sirottajan ulkopuolella, joita tarvitaan sirontatehtävän ratkaisuun. Oletetaan tilanne, missä kenttien lähteet sijaitsevat alueessa D_1 ja alue D_2 on lähteetön, kuten kuvassa 9 on esitetty. Nyt pinta S vastaa yhtälöiden (84) ja (85) pintaa Σ ja alue V aluetta D_2 . Koska alue D_2 on lähteetön, eli \mathbf{J}_s , \mathbf{M}_s , ρ_s ja m_s ovat nollia, tilavuusintegraalista tulee nolla.



Kuva 9: Ekvivalenssiperiaate kun lähteet ovat alueen D_2 ulkopuolella ja kenttäpiste \mathbf{r} on alueen sisäpuolella. Kentät alueessa D_2 voidaan määrätä yksikäsitteisesti pinnalla S olevien ekvivalenttien pintavirtatiheyksien \mathbf{J} ja \mathbf{M} avulla.

Primäärikenttien lähteet ovat alueessa D_1 , joten kentät alueessa D_2 toteuttavat homogeeniset Maxwellin yhtälöt.

Määrittelemällä integraalioperaattorit

$$\mathcal{K}(\mathbf{F})(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathcal{S}(\mathbf{F})(\mathbf{r}), \quad (86)$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{F})(\mathbf{r}) = \int_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}') dS(\mathbf{r}'), \quad (87)$$

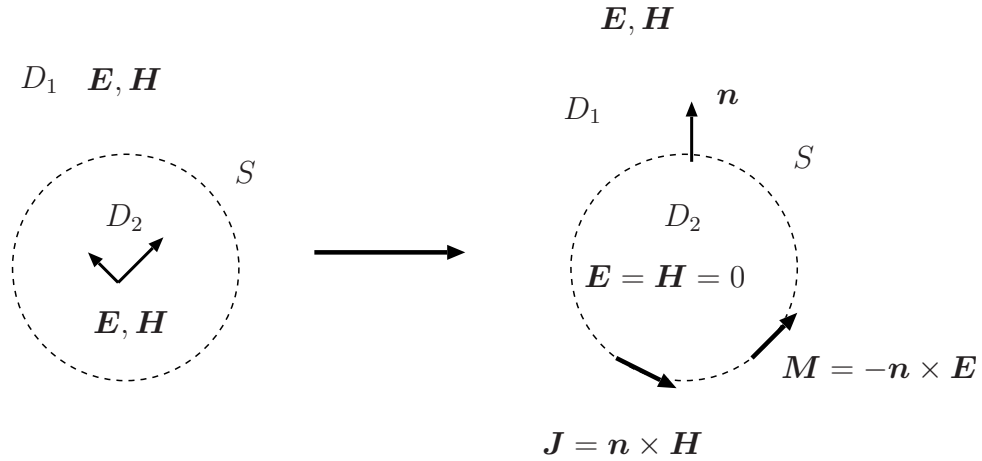
voidaan primäärikentät alueessa D_2 esittää alueen D_1 parametreilla

$$-\nabla \mathcal{S}_1(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^p) + i\omega\mu_1 \mathcal{S}_1(\mathbf{n} \times \mathbf{H}^p) + \mathcal{K}_1(\mathbf{n} \times \mathbf{E}^p) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \in D_1, \\ -\frac{1}{2}\mathbf{E}^p(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S, \\ -\mathbf{E}^p(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D_2, \end{cases} \quad (88)$$

$$-\nabla \mathcal{S}_1(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^p) - i\omega\epsilon_1 \mathcal{S}_1(\mathbf{n} \times \mathbf{E}^p) + \mathcal{K}_1(\mathbf{n} \times \mathbf{H}^p) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \in D_1, \\ -\frac{1}{2}\mathbf{H}^p(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S, \\ -\mathbf{H}^p(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D_2. \end{cases} \quad (89)$$

Primäärkenttien edessä oleva miinusmerkki johtuu siitä, että normaalivektori on määritelty osoittamaan alueesta D_2 ulospäin.

Alueen D_2 sirottajaa voidaan pitää alueeseen D_1 siirronneiden kenttien lähteinä. Koska sekundäärkenttien lähteet ovat alueessa D_2 , voidaan sekundäärkentät esittää alueessa D_1 alueen D_1 parametreilla



Kuva 10: Ekvivalenssiperiaate kun lähteet ovat alueen D_2 sisäpuolella ja kenttäpiste on alueessa D_1 . Kentät alueessa D_1 voidaan määrätä yksikäsitteisesti pinnalla S olevien ekvivalenttien pintavirtatiheyksien \mathbf{J} ja \mathbf{M} avulla.

$$-\nabla \mathcal{S}_1(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^s) + i\omega\mu_1 \mathcal{S}_1(\mathbf{n} \times \mathbf{H}^s) + \mathcal{K}_1(\mathbf{n} \times \mathbf{E}^s) = \begin{cases} \mathbf{E}^s(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D_1, \\ \frac{1}{2}\mathbf{E}^s(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S, \\ 0, & \mathbf{r} \in D_2, \end{cases} \quad (90)$$

$$-\nabla \mathcal{S}_1(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^s) - i\omega\epsilon_1 \mathcal{S}_1(\mathbf{n} \times \mathbf{E}^s) + \mathcal{K}_1(\mathbf{n} \times \mathbf{H}^s) = \begin{cases} \mathbf{H}^s(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D_1, \\ \frac{1}{2}\mathbf{H}^s(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S, \\ 0, & \mathbf{r} \in D_2. \end{cases} \quad (91)$$

Kokonaiskentät $\mathbf{E} = \mathbf{E}^p + \mathbf{E}^s$ ja $\mathbf{H} = \mathbf{H}^p + \mathbf{H}^s$ voidaan laskea summaamalla sekä sähkökenttäyhtälöt (88) ja (90) että magnetikkenttäyhtälöt (89) ja (91) puolittain. Summaamalla primäärkentät yhtälön molemmille puolille, saadaan kokonaiskentille esitys

$$\begin{aligned} \Theta \mathbf{E} &= -\nabla \mathcal{S}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) + i\omega\mu \mathcal{S}(\mathbf{J}) - \mathcal{K}(\mathbf{M}) + \mathbf{E}^p \\ \Theta \mathbf{H} &= -\nabla \mathcal{S}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) + i\omega\epsilon \mathcal{S}(\mathbf{M}) + \mathcal{K}(\mathbf{J}) + \mathbf{H}^p, \end{aligned} \quad (92)$$

missä ekvivalentti sähköinen pintavirtatiheys $\mathbf{J} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^p + \mathbf{H}^s)$, ekvivalentti magneettinen pintavirtatiheys $\mathbf{M} = -\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^p + \mathbf{E}^s)$ ja

$$\Theta = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in D_1, \\ \frac{1}{2}, & \mathbf{r} \in S, \\ 0, & \mathbf{r} \in D_2. \end{cases} \quad (93)$$

Esityksistä on jätetty aluetta D_1 kuvaavat alaindeksit pois eikä niitä jatkossa käytetä, mutta parametrit liittyvät edelleen alueeseen D_1 . Soveltamalla yhtälöitä (34)

$$\begin{aligned} \nabla_s \cdot \mathbf{J} &= i\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = i\omega \epsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \\ \nabla_s \cdot \mathbf{M} &= i\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = i\omega \mu \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \end{aligned} \quad (94)$$

yhtälöihin (92) ja määrittelemällä integraalioperaattori

$$\mathcal{L}(\mathbf{F})(\mathbf{r}) = -\frac{1}{ik} \nabla S(\nabla'_s \cdot \mathbf{F})(\mathbf{r}) + ik S(\mathbf{F})(\mathbf{r}) \quad (95)$$

voidaan integraaliesitykset esittää pelkästään ekvivalenttien pintavirtatiheyksien avulla kun $\omega \neq 0$

$$\Theta(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^p(\mathbf{r}) + \eta \mathcal{L}(\mathbf{J})(\mathbf{r}) - \mathcal{K}(\mathbf{M})(\mathbf{r}) \quad (96)$$

$$\Theta(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^p(\mathbf{r}) + \frac{1}{\eta} \mathcal{L}(\mathbf{M})(\mathbf{r}) + \mathcal{K}(\mathbf{J})(\mathbf{r}), \quad (97)$$

missä $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ on aaltoimpedanssi.

3.2 Integraaliyhtälöt PEC-reunaehdolle

Ideaalisen sähköisen johteen reunaehto eli PEC-reunaehto tarkoittaa, että sähkökentän tangentialikomponentti häviää pinnalla, jolloin myös ekvivalentti magneettinen pintavirtatiheys on nolla

$$\mathbf{M} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0. \quad (98)$$

Kappaleen pinnalla olevat kentät voidaan esittää pinnan suuntaisten ja pintaa vastaan kohtisuorassa olevien komponenttien avulla. Huygensin periaatteen mukaan riittää tuntea pinnan suuntaiset komponentit kenttien laskemiseksi pinnan ulkopuolella. Pinnan suuntaiset komponentit voidaan jakaa tangentialisiin ja $\mathbf{n} \times$ komponentteihin, jotka määritellään

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{tan} &= -\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{F} \\ \mathbf{F}_n &= \mathbf{n} \times \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (99)$$

missä \mathbf{n} on pinnan yksikköulkonormaali.

Sijoittamalla reunaehto (98) yhtälöön (96) ja ottamalla siitä tangentialikomponentti saadaan tangentialinen sähkökenttäintegraaliyhtälö

$$\mathbf{E}_{tan}^p = -\eta \mathcal{L}_{tan}(\mathbf{J}), \quad (100)$$

jota kutsutaan myöhemmin nimellä $T\text{-}EFIE_{PEC}$. Ottamalla tangentialikomponentti magneettikentän integraaliesityksestä (97) ja käyttämällä reunaehto (98) saadaan tangentialinen magneettikenttäintegraaliyhtälö $T\text{-}MFIE_{PEC}$

$$\mathbf{H}_{tan}^p = -\frac{1}{2}\mathbf{n} \times \mathbf{J} - \mathcal{K}_{tan}(\mathbf{J}). \quad (101)$$

Vastaavasti ottamalla ristitulot sähkö- ja magneettikenttien integraaliesityksistä (96) ja (97) pinnan yksikköulkonormaalien kanssa ja käyttämällä reunaehto (98) saadaan sähkö- ja magneettikenttäintegraaliyhtälöt $N\text{-}EFIE_{PEC}$ ja $N\text{-}MFIE_{PEC}$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}^p = -\eta \mathbf{n} \times \mathcal{L}(\mathbf{J}) \quad (102)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}^p = \frac{1}{2}\mathbf{J} - \mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{J}). \quad (103)$$

Korkeilla taajuuksilla suljettujen pintojen tapauksessa näillä yhtälöillä on kuitenkin sisäresonanssiongelma, joka aiheuttaa ratkaisuun epätarkkuutta. Tämä ongelma voidaan poistaa yhdistämällä $T\text{-}EFIE_{PEC}$ ja $N\text{-}MFIE_{PEC}$ yhtälöt ja kertomalla sopivalla vakiolla, jolloin saadaan yhdistettykenttäintegraaliyhtälö $J\text{-}CFIE_{PEC}$

$$\frac{1}{\eta}\mathbf{E}_{tan}^p + \mathbf{n} \times \mathbf{H}^p = \frac{1}{2}\mathbf{J} - \mathcal{L}_{tan}(\mathbf{J}) - \mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{J}). \quad (104)$$

Kirjain J nimen edessä tulee siitä, että yhtälön laatu on sama kuin sähköisellä pintavirtatiheydellä \mathbf{J} .

Toinen vaihtoehto olisi muodostaa ekvivalentin magneettisen pintavirtatiheyden dimensiossa oleva yhdistettykenttäintegraaliyhtälö $M\text{-}CFIE_{PEC}$ yhdistämällä yhtälöt $N\text{-}EFIE_{PEC}$ ja $T\text{-}MFIE_{PEC}$.

3.3 Integraaliyhtälöt DB-reunaehdolle

Integraaliyhtälöt DB-kappaleelle voidaan johtaa yhtälöistä (92). DB-pinnalla sähkö- ja magneettivuontiheyksien pinnan normaalinsuuntaiset komponentit häviävät eli $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0$ ja $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$. Lisäksi $\Theta = \frac{1}{2}$ pinnalla, joten yhtälöt (92) yksinkertaistuvat

muotoon

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathbf{E} &= i\omega\mu\mathcal{S}(\mathbf{J}) - \mathcal{K}(\mathbf{M}) + \mathbf{E}^p \\ \frac{1}{2}\mathbf{H} &= i\omega\epsilon\mathcal{S}(\mathbf{M}) + \mathcal{K}(\mathbf{J}) + \mathbf{H}^p.\end{aligned}\tag{105}$$

Käyttämällä ekvivalenttien pintavirtatiheyksien määritelmiä $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ja $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = -\mathbf{M}$ voidaan tangentialiset pintaintegraaliyhtälöt $T\text{-}EFIE_{DB}$ ja $T\text{-}MFIE_{DB}$ esittää muodossa

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{tan}^p &= \mathcal{K}_{tan}(\mathbf{M}) + \mathbf{n} \times \frac{1}{2}\mathbf{M} - i\omega\mu\mathcal{S}_{tan}(\mathbf{J}) \\ \mathbf{H}_{tan}^p &= -\mathcal{K}_{tan}(\mathbf{J}) - \mathbf{n} \times \frac{1}{2}\mathbf{J} - i\omega\epsilon\mathcal{S}_{tan}(\mathbf{M}).\end{aligned}\tag{106}$$

Ottamalla yhtälöistä puolittain ristitulot pinnan yksikköulkonormaalin kanssa voidaan $N\text{-}EFIE_{DB}$ ja $N\text{-}MFIE_{DB}$ yhtälöt esittää muodossa

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times \mathbf{E}^p &= \mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{M}) - \frac{1}{2}\mathbf{M} - i\omega\mu\mathbf{n} \times \mathcal{S}(\mathbf{J}) \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}^p &= -\mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{J}) + \frac{1}{2}\mathbf{J} - i\omega\epsilon\mathbf{n} \times \mathcal{S}(\mathbf{M}).\end{aligned}\tag{107}$$

Tangentialiset yhtälöt voidaan esittää myös matriisimuodossa

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{tan}^p \\ \mathbf{H}_{tan}^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{n} \times \frac{\mathcal{I}}{2} + \mathcal{K}_{tan} & -i\omega\mu\mathcal{S}_{tan} \\ -i\omega\epsilon\mathcal{S}_{tan} & -\mathbf{n} \times \frac{\mathcal{I}}{2} - \mathcal{K}_{tan} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{J} \end{pmatrix},\tag{108}$$

missä \mathcal{I} on identtinen operaattori eli $\mathcal{I}(\mathbf{f}) = \mathbf{f}$. Vastaavasti $N\text{-}EFIE_{DB}$ ja $N\text{-}MFIE_{DB}$ yhtälöt matriisimuodossa ovat

$$\begin{pmatrix} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^p \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathcal{I}}{2} + \mathbf{n} \times \mathcal{K} & -i\omega\mu\mathbf{n} \times \mathcal{S} \\ -i\omega\epsilon\mathbf{n} \times \mathcal{S} & \frac{\mathcal{I}}{2} - \mathbf{n} \times \mathcal{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{J} \end{pmatrix}.\tag{109}$$

3.3.1 Normalisoitu integraaliyhtälö

Katsomalla yhtälöitä (108) ja (109) huomataan, että matriisin ei-diagonaalitermit ovat eri laatua ja eri kokoisia, koska toisessa on kertoimena permittiivisyys ϵ ja toisessa permeabiilisuus μ . Tästä syystä matriisin balanssi on huono ja se voi aiheuttaa ongelmia numeerisessa ratkaisussa. Ongelmasta päästään eroon käyttämällä normalisoituja kenttiä ja pintavirtatiheyksiä.

Normalisoidaan sähkö- ja magneettikentät viitteessä [21] esitetyllä tavalla

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} &= \sqrt{\epsilon}\mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{H}} &= \sqrt{\mu}\mathbf{H},\end{aligned}\tag{110}$$

jolloin normalisoiduiksi pintavirtatiheyksiksi saadaan

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{J}} &= \mathbf{n} \times \sqrt{\mu} \mathbf{H} = \sqrt{\mu} \mathbf{J} \\ \tilde{\mathbf{M}} &= -\mathbf{n} \times \sqrt{\epsilon} \mathbf{E} = \sqrt{\epsilon} \mathbf{M}.\end{aligned}\quad (111)$$

Normalisoidut tangentialiset integraaliyhtälöt voidaan siis esittää muodossa

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_{tan}^p \\ \tilde{\mathbf{H}}_{tan}^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{n} \times \frac{I}{2} + \mathcal{K}_{tan} & -ik\mathcal{S}_{tan} \\ -ik\mathcal{S}_{tan} & -\mathbf{n} \times \frac{I}{2} - \mathcal{K}_{tan} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{M}} \\ \tilde{\mathbf{J}} \end{pmatrix} \quad (112)$$

ja $\mathbf{n} \times$ yhtälöt

$$\begin{pmatrix} \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}^p \\ \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{I}{2} + \mathbf{n} \times \mathcal{K} & -ik\mathbf{n} \times \mathcal{S} \\ -ik\mathbf{n} \times \mathcal{S} & \frac{I}{2} - \mathbf{n} \times \mathcal{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{M}} \\ \tilde{\mathbf{J}} \end{pmatrix}, \quad (113)$$

missä aaltoluku $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$.

3.3.2 Yhdistetyt kenttäintegraaliyhtälöt DB-reunaehdolle

Pelkkien $\mathbf{n} \times$ yhtälöiden käyttö suljetun pinnan tapauksessa aiheuttaa sisäresonansseja tietyillä taajuuksilla, ja niitä syntyy paljon kappaleen ollessa suuri aallonpituuteen nähden. Tällöin ongelman ratkaisu ei ole yksikäsitteinen, ja ratkaisussa saattaa olla epätarkkuutta. Sisäresonanssien aiheuttamat ongelmat voidaan poistaa käyttämällä yhdistettyjä kenttäintegraaliyhtälöitä, missä kiinnitetään pinnan tangentti-komponentit ja $\mathbf{n} \times$ komponentit.

Muodostetaan ensiksi sähköisen pintavirtatiheyden laatua oleva yhdistetty kenttäintegraaliyhtälö ja kutsutaan sitä lyhenteellä $J\text{-CFIE}_{DB}$.

$$J\text{-CFIE}_{DB} : \frac{1}{\eta} T\text{-EFIE}_{DB} + N\text{-MFIE}_{DB} \quad (114)$$

Sijoittamalla tangentialinen sähkökenttäintegraaliyhtälö $T\text{-EFIE}_{DB}$ (106) ja $N\text{-MFIE}_{DB}$ (107), $J\text{-CFIE}_{DB}$ yhtälöksi saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{\eta} \mathbf{E}_{tan}^p + \mathbf{n} \times \mathbf{H}^p &= \frac{1}{2\eta} \mathbf{n} \times \mathbf{M} - \frac{1}{\eta} i\omega\mu \mathcal{S}_{tan}(\mathbf{J}) \\ + \frac{1}{\eta} \mathcal{K}_{tan}(\mathbf{M}) + \frac{1}{2} \mathbf{J} - i\omega\epsilon \mathbf{n} \times \mathcal{S}(\mathbf{M}) - \mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{J}).\end{aligned}\quad (115)$$

Vastaavasti magneettisen pintavirtatiheyden laatua oleva yhdistetty kenttäintegraaliyhtälö eli $M\text{-CFIE}_{DB}$ voidaan esittää seuraavasti

$$M\text{-CFIE}_{DB} : -N\text{-EFIE}_{DB} + \eta T\text{-MFIE}_{DB} \quad (116)$$

ja sijoittamalla yhtälöt saadaan

$$\begin{aligned} -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^p + \eta \mathbf{H}_{tan}^p &= \frac{1}{2} \mathbf{M} + i\omega\mu \mathbf{n} \times \mathcal{S}(\mathbf{J}) - \mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{M}) \\ -\eta \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{J} - i\omega\eta\epsilon \mathcal{S}_{tan}(\mathbf{M}) - \eta \mathcal{K}_{tan}(\mathbf{J}). \end{aligned} \quad (117)$$

Yhdistetyt kenttäintegraaliyhtälöt DB-pinnalla $JM-CFIE_{DB}$ matriisimuodossa on

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\eta} \mathbf{E}_{tan}^p + \mathbf{n} \times \mathbf{H}^p \\ -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^p + \eta \mathbf{H}_{tan}^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\eta} i\omega\mu \mathcal{S}_{tan} - \mathbf{n} \times \mathcal{K} + \frac{1}{2} \mathcal{I} & \frac{1}{\eta} \mathcal{K}_{tan} - i\omega\epsilon \mathbf{n} \times \mathcal{S} + \frac{1}{2\eta} \mathbf{n} \times \mathcal{I} \\ i\omega\mu \mathbf{n} \times \mathcal{S} - \eta \mathcal{K}_{tan} - \frac{\eta}{2} \mathbf{n} \times \mathcal{I} & -i\eta\omega\epsilon \mathcal{S}_{tan} - \mathbf{n} \times \mathcal{K} + \frac{1}{2} \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix}. \quad (118)$$

Käyttämällä normalisoituja kenttiä ja pintavirtatiheyksiä voidaan yhdistetyt kenttäintegraaliyhtälöt esittää muodossa

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_{tan}^p + \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}^p \\ -\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}^p + \tilde{\mathbf{H}}_{tan}^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ik \mathcal{S}_{tan} - \mathbf{n} \times \mathcal{K} + \frac{1}{2} \mathcal{I} & \mathcal{K}_{tan} - ik \mathbf{n} \times \mathcal{S} + \mathbf{n} \times \frac{1}{2} \mathcal{I} \\ -\mathcal{K}_{tan} + ik \mathbf{n} \times \mathcal{S} - \mathbf{n} \times \frac{1}{2} \mathcal{I} & -ik \mathcal{S}_{tan} - \mathbf{n} \times \mathcal{K} + \frac{1}{2} \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}} \\ \tilde{\mathbf{M}} \end{pmatrix}. \quad (119)$$

3.4 Sironneet kentät

Jos kappaleen pinnalla olevat ekvivalentit sähköiset ja magneettiset pintavirtatiheydet tunnetaan, voidaan sironneet sähkö- ja magneettikentät laskea pintaintegraaliyhtälöesityksistä (92) missä tahansa pisteessä pinnan ulkopuolella. Sironneiden kenttien aiheuttajat ovat nyt kappaleen pinnalla olevat pintavirtatiheydet \mathbf{J} ja \mathbf{M} . Sirottajan ulkopuolella $\Omega = 1$, joten sironneet kentät DB-reunaehdon tapauksessa voidaan laskea yhtälöistä

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) &= i\omega\mu \mathcal{S}(\mathbf{J})(\mathbf{r}) - \mathcal{K}(\mathbf{M})(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}^s(\mathbf{r}) &= i\omega\epsilon \mathcal{S}(\mathbf{M})(\mathbf{r}) + \mathcal{K}(\mathbf{J})(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (120)$$

missä \mathbf{r} on mikä tahansa pinnan ulkopuolella oleva piste, missä sironneet kentät halutaan laskea. Vastaavasti PEC-kappaleesta sironneet kentät saadaan laskettua yhtälöistä

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) &= \eta \mathcal{L}(\mathbf{J})(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}^s(\mathbf{r}) &= \mathcal{K}(\mathbf{J})(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (121)$$

Tarkastelupisteen ja kappaleen välisen etäisyyden ollessa huomattavasti suurempi kuin kappaleen fyysiset mitat ja aallonpituus voidaan sironneet sähkö- ja magneettikentät laskea kaukokenttäapproksimaatiosta

$$\mathbf{E}_{far}^s(\mathbf{r}) = -i\omega\mu\frac{e^{ikr}}{4\pi r}(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} \times \int_{S'} e^{ik\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS') \quad (122)$$

$$-ik\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\hat{\mathbf{r}} \times \int_{S'} e^{ik\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} \mathbf{M}(\mathbf{r}') dS'$$

$$\mathbf{H}_{far}^s(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta}\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{far}^s, \quad (123)$$

missä \mathbf{r} on kenttäpiste, $r = |\mathbf{r}|$, $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ ja \mathbf{r}' on lähdepiste kappaleen pinnalla. Kaukokenttäapproksimaation etuna suoraan ratkaisuun verrattuna on sen yksinkertaisuus, jolloin kenttien laskentaan kuluva aika on huomattavasti lyhyempi.

4 Momenttimenetelmä

Momenttimenetelmällä, joka tunnetaan lyhenteellä MoM (Method of Moments) [22], tarkoitetaan menetelmää, missä jatkuvat integraaliyhtälöt diskretoidaan ja muutetaan lineaariseksi yhtälöryhmäksi eli matriisiyhtälöksi. Joskus momenttimenetelmällä tarkoitetaan myös koko pintaintegraaliyhtälömenetelmää. Integraaliyhtälöiden tuntemattomat pintavirtatiheydet diskretoidaan esittämällä ne tunnettujen kantafunktioiden lineaariyhdisteenä. Integraaliyhtälöt diskretoidaan ja muutetaan matriisiyhtälöksi käyttämällä testausprosessia. Tässä kappaleessa esitellään pintavirtatiheyksien diskretointi, työssä käytetyt kantafunktiot ja Galerkin testausprosessi.

4.1 Pintavirtatiheyksien diskretointi

Pintaintegraaliyhtälömenetelmässä tuntemattomia ovat herättävän kentän indusoidut ekvivalentit sähköiset ja magneettiset pintavirtatiheydet $\tilde{\mathbf{J}}$ ja $\tilde{\mathbf{M}}$. Numeerista ratkaisua varten nämä pintavirtatiheydet pitää diskretoida. Tämä tapahtuu approksimoimalla ekvivalentteja sähköisiä ja magneettisia pintavirtatiheyksiä tunnettujen kantafunktioiden \mathbf{f}_n lineaariyhdisteenä

$$\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \approx \sum_{n=1}^N c_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \quad (124)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) \approx \sum_{n=1}^N b_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}), \quad (125)$$

missä c_n ja b_n ovat tuntemattomia kertoimia ja N on kantafunktioiden lukumäärä. Sijoittamalla ekvivalenttien pintavirtatiheyksien approksimaatiot N -EFIE_{DB} ja N -MFIE_{DB} yhtälöihin (113), saadaan

$$\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}^p = \sum_{n=1}^N b_n \mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{f}_n) - \sum_{n=1}^N b_n \frac{1}{2} \mathbf{f}_n - \sum_{n=1}^N c_n i k \mathbf{n} \times \mathcal{S}(\mathbf{f}_n) \quad (126)$$

$$\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}^p = - \sum_{n=1}^N c_n \mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{f}_n) + \sum_{n=1}^N c_n \frac{1}{2} \mathbf{f}_n - \sum_{n=1}^N b_n i k \mathbf{n} \times \mathcal{S}(\mathbf{f}_n), \quad (127)$$

jolloin tuntemattomiksi jää vain skalaariset kertoimet b_n ja c_n , missä $n = 1, \dots, N$.

Vastaavasti normalisoidut yhdistetyt kenttäintegraaliyhtälöt DB:lle CFIE_{DB} voi-

daan esittää muodossa

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{tan}^p + \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}^p &= \sum_{n=1}^N b_n \left[-ik\mathcal{S}_{tan}(\mathbf{f}_n) + \frac{1}{2}\mathbf{f}_n - \mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{f}_n) \right] \\ &+ \sum_{n=1}^N c_n \left[-ik\mathbf{n} \times \mathcal{S}(\mathbf{f}_n) + \mathbf{n} \times \frac{1}{2}\mathbf{f}_n + \mathcal{K}_{tan}(\mathbf{f}_n) \right] \end{aligned} \quad (128)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_{tan}^p - \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}^p &= \sum_{n=1}^N b_n \left[ik\mathbf{n} \times \mathcal{S}(\mathbf{f}_n) - \frac{1}{2}\mathbf{n} \times \mathbf{f}_n - \mathcal{K}_{tan}(\mathbf{f}_n) \right] \\ &+ \sum_{n=1}^N c_n \left[-ik\mathcal{S}_{tan}(\mathbf{f}_n) + \frac{1}{2}\mathbf{f}_n - \mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{f}_n) \right]. \end{aligned} \quad (129)$$

Ideaalisen sähköisen johteen tapauksessa tangentialinen sähkökenttäintegraaliyhtälö $T\text{-}EFIE_{PEC}$ voidaan kirjoittaa muodossa

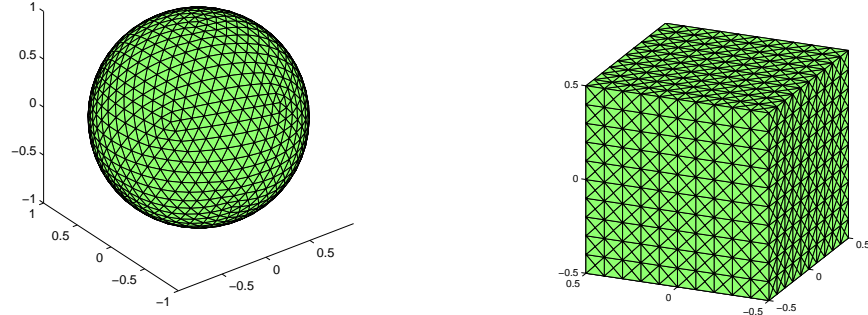
$$\mathbf{E}_{tan}^p = - \sum_{n=1}^N c_n \eta \mathcal{L}(\mathbf{f}_n)_{tan}, \quad (130)$$

ja yhdistetty kenttäintegraaliyhtälö $J\text{-}CFIE_{PEC}$ on

$$\frac{1}{\eta} \mathbf{E}_{tan}^p + \mathbf{n} \times \mathbf{H}^p = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N c_n \mathbf{f}_n - \sum_{n=1}^N c_n \mathcal{L}(\mathbf{f}_n)_{tan} - \sum_{n=1}^N c_n \mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{f}_n). \quad (131)$$

Kantafunktioiden $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$ valintaan vaikuttavat ratkaistavan ongelman ominaisuudet ja niiden valinnalla on suuri merkitys ratkaisun tarkkuuteen. Tässä työssä geometria on diskretoitu lineaarisilla kolmioelementeillä, joten pinta ei ole sileä kaikissa tapauksissa. Kuvassa 11 nähdään kolmioelementeillä diskretoitu pallo ja kuutio. Diskretoidun geometrian pinnalla tuntemattomien pintavirtatiheyksien elementtiverkon särmien suuntaiset komponentit ovat epäjatkuvia, mutta särmiä vastaan kohtisuorassa olevat komponentit ovat jatkuvia. Tästä syystä kantafunktiot on hyvä valita siten, että elementtiverkon särmillä normaalikomponentit ovat jatkuvia ja särmän suuntaiset ovat epäjatkuvia.

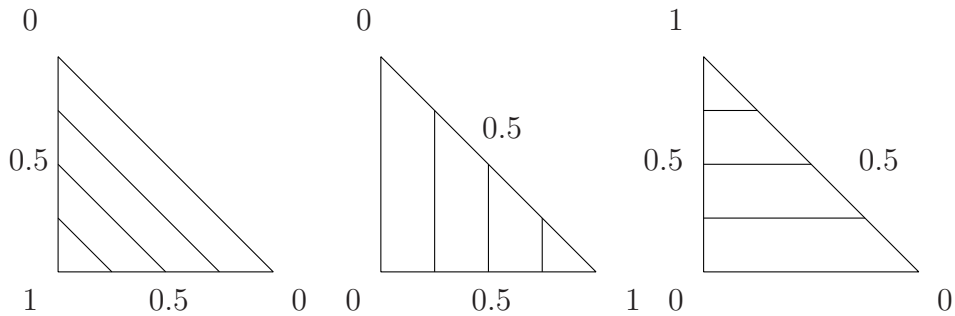
Diskretoidun geometrian pinnalla tuntemattomien pintavirtatiheyksien elementtiverkon särmien suuntaiset komponentit ovat epäjatkuvia, mutta särmiä vastaan kohtisuorassa olevat komponentit ovat jatkuvia. Tästä syystä kantafunktiot on hyvä valita siten, että elementtiverkon särmillä normaalikomponentit ovat jatkuvia ja särmän suuntaiset ovat epäjatkuvia.



Kuva 11: Kolmioelementeillä diskretoitu pallo ja kuutio.

4.1.1 Muotofunktiot

Ennen kuin esitellään kantafunktiot, määritellään niin sanotut muotofunktiot, joiden avulla kantafunktiot voidaan esittää. Muotofunktiot ovat yksinkertaisia funktioita, jotka saavat nollasta poikkeavia arvoja ainoastaan yhden elementin alueella siten, että ne saavat arvon yksi yhdessä elementin noodipisteessä ja arvon nolla muissa pisteissä ja ovat p -asteisia polynomeja muualla. Näin ollen muotofunktioiden avulla voidaan muodostaa funktion p -asteinen interpolaatio kolmion sisälle, jos tunnetaan funktion arvot kolmion noodipisteissä.



Kuva 12: Lineaariset muotofunktiot referenssikolmiolla. Lineaariset muotofunktiot saavat arvon yksi yhdessä kolmion kärkipisteessä ja arvon nolla muissa kärkipisteissä, ja ne ovat lineaarisia kolmion sisällä.

Määritellään lineaariset muotofunktiot referenssikolmiolle \hat{T} , jonka kärkipisteet ovat $(0,0)$, $(1,0)$ ja $(0,1)$

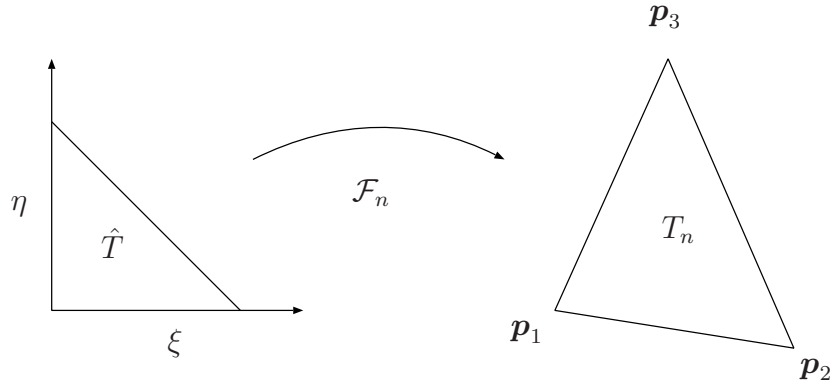
$$\begin{aligned}\hat{N}_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \\ \hat{N}_2(\xi, \eta) &= \xi \\ \hat{N}_3(\xi, \eta) &= \eta,\end{aligned}\tag{132}$$

missä (ξ, η) on piste referenssikolmiolla.

Muotofunktiot yleisellä kolmiolla T_n voidaan esittää lineaarisen kuvauksen $\mathcal{F}_n : \hat{T} \rightarrow T_n$ avulla, joka määritellään

$$\mathcal{F}_n(\xi, \eta) = (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)\xi + (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)\eta + \mathbf{p}_1, \quad (133)$$

missä pisteet \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 ja \mathbf{p}_3 ovat yleisen kolmion T_n kärkipisteet ja n on kolmion indeksi.



Kuva 13: Lineaarikuvaus referenssikolmiolta yleiselle kolmiolle $\mathcal{F}_n : \hat{T} \rightarrow T_n$. Referenssikolmion piste (η, ξ) kuvautuu yleisen kolmion pisteeksi (x, y, z) .

Näin ollen kuvaus \mathcal{F}_n kuvaa referenssikolmion kärkipisteet yleisen kolmion kärkipisteiksi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(0, 0) &\rightarrow \mathbf{p}_1 \\ \mathcal{F}_n(1, 0) &\rightarrow \mathbf{p}_2 \\ \mathcal{F}_n(0, 1) &\rightarrow \mathbf{p}_3. \end{aligned} \quad (134)$$

Muotofunktiot yleisellä 3D elementillä T_n voidaan esittää muodossa

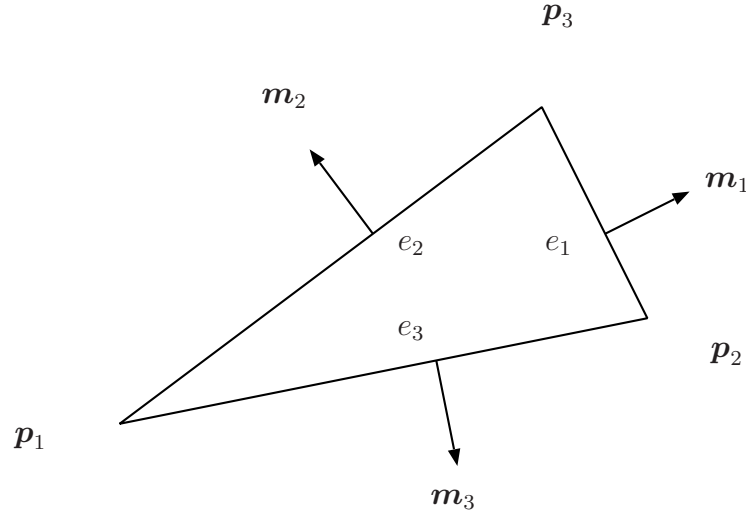
$$N_{n,l}(x, y, z) = \hat{N}_l(\mathcal{F}_n^{-1}(x, y, z)), \quad (135)$$

missä \mathcal{F}_n^{-1} on kuvauksen \mathcal{F}_n käänteiskuvaus ja l on muotofunktion lokaali indeksi kolmiolla.

Muotofunktioiden pintagradientit voidaan laskea kaavasta

$$\nabla_s N_{n,l} = -\frac{l_l}{2A_n} \mathbf{m}_l, \quad (136)$$

missä A_n on kolmion pinta-ala ja \mathbf{m}_l on kolmion kärkipistettä \mathbf{p}_l vastapäätä olevan särmän e_l yksikköulkonormaali ja l_l on kyseisen särmän pituus. Kuvassa 14 nähdään yleisen kolmioelementin lokaali indeksointi.



Kuva 14: Yleisen kolmion kärkipisteiden ja särmien lokaali indeksointi.

Määritellään vielä kolmion särmien suuntaiset vektorit seuraavalla tavalla

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1. \end{aligned} \tag{137}$$

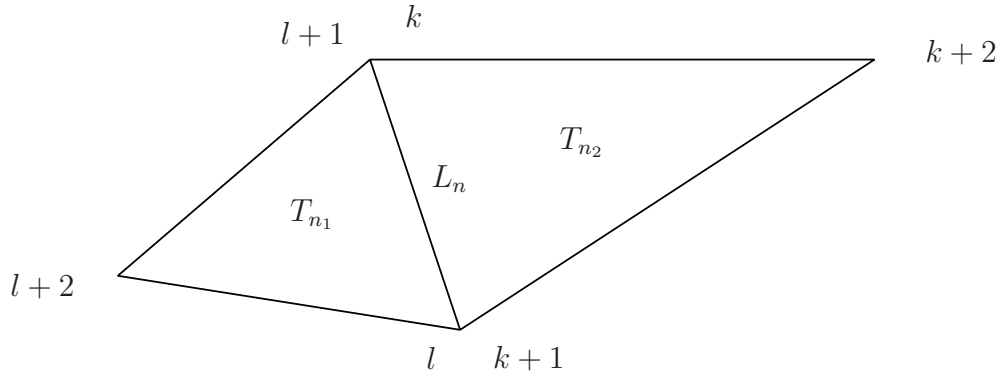
4.1.2 RWG-kantafunktiot

RWG (Rao-Wilton-Glisson)-kantafunktiot [23] ovat yleisesti käytettyjä kantafunktioita pintaintegraaliyhtälömenetelmässä. Ne ovat niin sanottuja sekakertaluvun divergenssikantafunktioita. Kantafunktion särmän suuntainen komponentti on lineaarinen eli astetta yksi tai nolla. Särmää vastaan kohtisuora komponentti on vakio eli astetta nolla. RWG-kantafunktioiden avulla esitettyjen funktioiden särmää vastaan kohtisuora komponentti on jatkuva ja särmän suuntainen epäjatkuva. Lisäksi niiden pintadivergenssi on äärellinen.

RWG-kantafunktiot voidaan esittää edellisessä kappaleessa mainittujen muotofunktioiden avulla. Olkoon $N_{n_1,l}$ ja $N_{n_1,l+1}$ ensimmäisen asteen muotofunktiot, jotka liittyvät elementin T_{n_1} särmään e_{l+2} , ja elementin T_{n_2} särmään e_{k+2} liittyvät muotofunktiot ovat $N_{n_2,k}$ ja $N_{n_2,k+1}$. Määritellään kantafunktiot elementtien T_{n_1} ja T_{n_2} yhteiselle särmälle seuraavasti

$$\mathbf{f}_n^{RWG}(\mathbf{r}) = \begin{cases} -L_n \mathbf{n}_{n_1} \times (N_{n_1,l} \nabla_s N_{n_1,l+1} - N_{n_1,l+1} \nabla_s N_{n_1,l}), & \text{jos } \mathbf{r} \in T_{n_1}, \\ L_n \mathbf{n}_{n_2} \times (N_{n_2,k} \nabla_s N_{n_2,k+1} - N_{n_2,k+1} \nabla_s N_{n_2,k}), & \text{jos } \mathbf{r} \in T_{n_2}, \\ 0 & \text{muualla,} \end{cases} \tag{138}$$

missä \mathbf{n}_{n_1} ja \mathbf{n}_{n_2} ovat kolmioiden T_{n_1} ja T_{n_2} yksikköulkonormaalivektorit järjestyksessä ja L_n on yhteisen särmän pituus.



Kuva 15: RWG-kantafunktio määritellään kolmioparin yhteiselle särmälle.

Sijoittamalla ylläoleviin määritelmiin muotofunktioiden gradientit voidaan RWG-kantafunktio esittää muodossa

$$\mathbf{f}_n^{RWG}(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\frac{L_n}{2A_{n_1}} [\mathbf{u}_{n_1,l+1} N_{n_1,l} - \mathbf{u}_{n_1,l} N_{n_1,l+1}], & \text{jos } \mathbf{r} \in T_{n_1}, \\ \frac{L_n}{2A_{n_2}} [\mathbf{u}_{n_2,k+1} N_{n_2,k} - \mathbf{u}_{n_2,l} N_{n_2,k+1}], & \text{jos } \mathbf{r} \in T_{n_2}, \\ 0 & \text{muualla,} \end{cases} \quad (139)$$

missä $\mathbf{u}_{n_i,j}$ on kolmion T_{n_i} särmän e_j suuntainen vektori ja A_{n_1} ja A_{n_2} ovat kolmioiden pinta-alat.

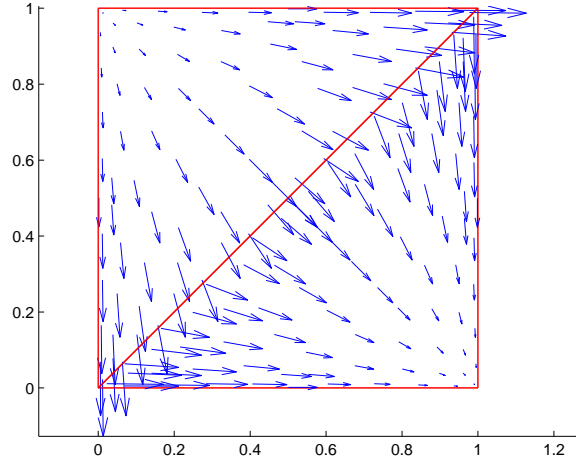
Vaihtoehtoinen tapa määritellä RWG-kantafunktiot on [23]

$$\mathbf{f}_n^{RWG}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{L_n}{2A_{n_1}}(\mathbf{r} - \mathbf{p}_{n_1}), & \text{jos } \mathbf{r} \in T_{n_1} \\ -\frac{L_n}{2A_{n_2}}(\mathbf{r} - \mathbf{p}_{n_2}), & \text{jos } \mathbf{r} \in T_{n_2} \\ 0 & \text{muualla,} \end{cases} \quad (140)$$

missä \mathbf{p}_{n_1} ja \mathbf{p}_{n_2} ovat kolmioiden pisteet, jotka ovat yhteistä särmää vastapäätä.

RWG-kantafunktion pintadivergenssi on paloittain vakio ja se voidaan laskea kaavasta

$$\nabla_s \cdot \mathbf{f}_n^{RWG}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{L_n}{A_{n_1}}, & \text{jos } \mathbf{r} \in T_{n_1} \\ -\frac{L_n}{A_{n_2}}, & \text{jos } \mathbf{r} \in T_{n_2} \\ 0 & \text{muualla,} \end{cases} \quad (141)$$



Kuva 16: RWG-kantafunktio yleisellä kolmioparilla.

4.1.3 Lineaariset kantafunktiot

Lineaarisen kantafunktion nimi tulee siitä, että elementtiverkon särmän suuntaiset ja särmää vastaan kohtisuorat komponentit ovat lineaarisia tai nollia. Näin ollen niillä saadaan ensimmäisen asteen esitys molemmille komponenteille. Määritellään lineaarinen kantafunktio \mathbf{f}_n^{LL} kuvan 15 elementtien T_{n_1} ja T_{n_2} yhteiselle särmälle käyttämällä ensimmäisen asteen muotofunktioita

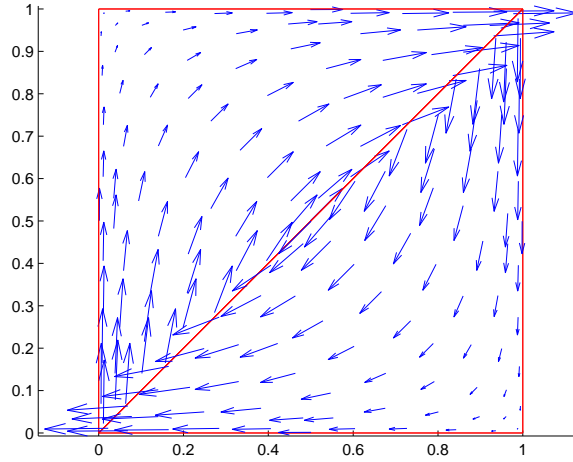
$$\mathbf{f}_n^{LL}(\mathbf{r}) = \begin{cases} -L\mathbf{n}_{n_1} \times (N_{n_1,l}\nabla_s N_{n_1,l+1} + N_{n_1,l+1}\nabla_s N_{n_1,l}), & \text{jos } \mathbf{r} \in T_{n_1}, \\ L\mathbf{n}_{n_2} \times (N_{n_2,k}\nabla_s N_{n_2,k+1} + N_{n_2,k+1}\nabla_s N_{n_2,k}), & \text{jos } \mathbf{r} \in T_{n_2}, \\ 0 & \text{muualla.} \end{cases} \quad (142)$$

Sijoittamalla muotofunktioiden gradientit lineaariset kantafunktiot voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{f}_n^{LL}(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\frac{L_n}{2A_{n_1}} [\mathbf{u}_{n_1,l+1}N_{n_1,l} + \mathbf{u}_{n_1,l}N_{n_1,l+1}], & \text{jos } \mathbf{r} \in T_{n_1}, \\ \frac{L_n}{2A_{n_2}} [\mathbf{u}_{n_2,k+1}N_{n_2,k} + \mathbf{u}_{n_2,l}N_{n_2,k+1}], & \text{jos } \mathbf{r} \in T_{n_2}, \\ 0 & \text{muualla.} \end{cases} \quad (143)$$

Lisäksi lineaarisen kantafunktion pintadivergenssi on nolla eli

$$\nabla_s \cdot \mathbf{f}_n^{LL} = 0. \quad (144)$$



Kuva 17: Lineaarinen kantafunktio yleisellä kolmioparilla.

4.1.4 Silmukkakantafunktiot

DB-reunaehto mukaan ekvivalenttien pintavirtatiheyksien pintadivergenssien pitää olla nollia, mutta RWG-kantafunktioiden pintadivergenssi on aina nollasta poikkeava. Näin ollen RWG-kantafunktiot eivät itsessään toteuta DB-reunaehto. Tämä saattaa aiheuttaa ongelmia ratkaisun tarkkuuteen. Ongelma voidaan välttää valitsemalla kantafunktioksi divergenssittömät kantafunktiot, jolloin DB-reunaehto toteutuu myös yhden kantafunktion alueella.

Silmukkakantafunktiot [24] liittyvät elementtiverkon solmupisteisiin siten, että ne kiertävät kyseisen pisteen. Kiertosuunnan voi valita joko oikea- tai vasenkätiseksi. Kuvassa 18 nähdään pisteeseen \mathbf{p}_n liittyvän silmukkakantafunktion periaate.

Silmukkakantafunktio tekee silmukan pisteen ympäri, jolloin sen pintadivergenssi on nolla ja se muodostetaan summaamalla pisteeseen liittyvien särmien RWG-kantafunktiot yhteen eli

$$\mathbf{f}_1^{loop} = \mathbf{f}'_1 + \mathbf{f}'_2 + \mathbf{f}'_3 + \mathbf{f}'_4 + \mathbf{f}'_5, \quad (145)$$

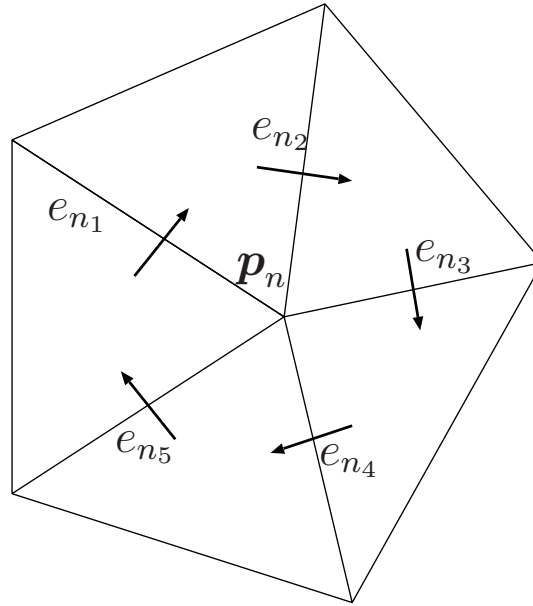
missä \mathbf{f}'_i on särmälle e_{n_i} liittyvä RWG kantafunktio jaettuna särmän pituudella.

Silmukkakantafunktioiden määrä L :llä elementillä diskretoidulla geometrialla voidaan laskea kaavalla

$$L = V + N - 1, \quad (146)$$

missä V on solmupisteiden määrä ja N on geometrian erillisten äärioviivojen määrä. Erillisten äärioviivojen määrä voidaan laskea Eulerin kaavan avulla

$$V - E + F = 2 - N, \quad (147)$$



Kuva 18: Silmukkakantafunktio määritellään elementtiverkon solmupisteisiin. Solmupisteisiin liittyvien särmien RWG-kantafunktiot summataan yhteen siten, että kiertosuunta pysyy samana.

missä E on särmien määrä ja F kolmioiden määrä. Suljetulla pinnalla $N = 0$, joten silmukkakantafunktioiden määräksi tulee $L = V - 1$. Näin ollen geometriaan jää yksi solmupiste, johon ei muodosteta kantafunktiota. Tämän solmupisteen voi valita mielivaltaisesti.

Jos tehtävässä on kaksi eri tuntematonta esimerkiksi \mathbf{J} ja \mathbf{M} , molemmille tuntemattomille tarvitaan omat kantafunktiot. Tällöin pitää poistaa kaksi kantafunktiota, yksi funktioon \mathbf{J} liittyvä ja toinen funktioon \mathbf{M} liittyvä. Poistettavat kantafunktiot eivät saa liittyä samaan solmupisteeseen tai muuten yhtälöryhmään jää lineaarista riippuvuutta.

4.2 Yhtälöiden testaus Galerkinin menetelmällä

Integraaliyhtälöt muunnetaan matriisiyhtälöksi käyttämällä testausprosessia, missä yhtälöistä otetaan puolittain pistetulot tunnettujen testifunktioiden \mathbf{t}_m ($m = 1, \dots, M$) kanssa ja integroidaan pinnan yli. Testausprosessia, missä testifunktiot ovat samoja kuin kantafunktiot, kutsutaan Galerkinin menetelmäksi ($\mathbf{t}_m = \mathbf{f}_n$, kun $m = n$). Käyttämällä Galerkinin menetelmää normalisoituihin N - $EFIE_{DB}$ ja N - $MFIE_{DB}$ yhtälöihin (126, 127) saadaan

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}^p \, dS &= \sum_{n=1}^N b_n \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{f}_n) \, dS \\ &- \sum_{n=1}^N b_n \int_S \frac{1}{2} \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{f}_n \, dS - \sum_{n=1}^N c_n ik \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathcal{S}(\mathbf{f}_n) \, dS \end{aligned} \quad (148)$$

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}^p \, dS &= - \sum_{n=1}^N c_n \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{f}_n) \, dS \\ &+ \sum_{n=1}^N c_n \int_S \frac{1}{2} \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{f}_n \, dS - \sum_{n=1}^N b_n ik \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathcal{S}(\mathbf{f}_n) \, dS \end{aligned} \quad (149)$$

kaikilla $m, n = 1, \dots, N$, missä integraali on pinnan S yli. Ylläolevat yhtälöt voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (150)$$

Systeemimatriisi A^{nDB} koostuu 4 eri lohkoista

$$A^{nDB} = \begin{pmatrix} A_{mn}^{11} & A_{mn}^{12} \\ A_{mn}^{21} & A_{mn}^{22} \end{pmatrix}, \quad (151)$$

missä

$$\begin{aligned} A_{mn}^{11} &= \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{f}_n) \, dS - \frac{1}{2} \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{f}_n \, dS \\ A_{mn}^{12} &= -ik \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathcal{S}(\mathbf{f}_n) \, dS \\ A_{mn}^{21} &= -ik \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathcal{S}(\mathbf{f}_n) \, dS = A_{mn}^{12} \\ A_{mn}^{22} &= - \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{f}_n) \, dS + \frac{1}{2} \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{f}_n \, dS = -A_{mn}^{11}, \end{aligned} \quad (152)$$

Vektori \mathbf{x}^{nDB} sisältää tuntemattomat kertoimet sekä sähköiselle että magneettiselle pintavirtatiheydelle, ja lähdevektori \mathbf{b}^{nDB} sisältää herättävät kentät

$$\mathbf{x}^{nDB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^{nDB} = \begin{pmatrix} \int_S \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}^p \, dS \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}^p \, dS \\ \int_S \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}^p \, dS \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}^p \, dS \end{pmatrix}. \quad (153)$$

Vastaavasti normalisoidun yhdistetyn kenttäintegraaliyhtälön systeemimatriisi testaustaprosessin jälkeen voidaan esittää muodossa

$$A^{CFIE_{DB}} = \begin{pmatrix} A_{mn}^{11} & A_{mn}^{12} \\ A_{mn}^{21} & A_{mn}^{22} \end{pmatrix}, \quad (154)$$

missä

$$\begin{aligned} A_{mn}^{11} &= -ik \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathcal{S}(\mathbf{f}_n) \, dS - \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{f}_n) \, dS + \frac{1}{2} \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{f}_n \, dS \\ A_{mn}^{12} &= -ik \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathcal{S}(\mathbf{f}_n) \, dS + \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathcal{K}(\mathbf{f}_n) \, dS + \frac{1}{2} \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{f}_n \, dS \\ A_{mn}^{21} &= ik \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathcal{S}(\mathbf{f}_n) \, dS - \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathcal{K}(\mathbf{f}_n) \, dS - \frac{1}{2} \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{f}_n \, dS \\ A_{mn}^{22} &= -ik \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathcal{S}(\mathbf{f}_n) \, dS - \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{f}_n) \, dS + \frac{1}{2} \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{f}_n \, dS, \end{aligned} \quad (155)$$

kun $m, n = 1, \dots, N$ ja lähdevektori

$$\mathbf{b}^{CFIE_{DB}} = \begin{pmatrix} \int_S \mathbf{f}_1 \cdot (\tilde{\mathbf{E}}^p + \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}^p) \, dS \\ \vdots \\ \int_S \mathbf{f}_m \cdot (\tilde{\mathbf{E}}^p + \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}^p) \, dS \\ \int_S \mathbf{f}_1 \cdot (-\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}^p + \tilde{\mathbf{H}}^p) \, dS \\ \vdots \\ \int_S \mathbf{f}_m \cdot (-\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}^p + \tilde{\mathbf{H}}^p) \, dS \end{pmatrix}. \quad (156)$$

PEC-reunaehdon tapauksessa testausprosessi on samanlainen kuin DB-reunaehdon tapauksessa, eli käytetään Galerkinin menetelmää. Ottamalla puolittain pistetulo testifunktion ja $T\text{-}EFIE_{PEC}$ yhtälön (130) välillä ja integroimalla pinnan yli, saadaan systeemimatriisin alkioiksi

$$A_{mn}^{T\text{-}EFIE_{PEC}} = -\eta \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathcal{L}(\mathbf{f}_n) \, dS, \quad m, n = 1, \dots, N. \quad (157)$$

Lähdevektorin alkioiksi saadaan

$$b_m^{T\text{-}EFIE_{PEC}} = \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{E}^p \, dS, \quad m = 1, \dots, N. \quad (158)$$

Yhdistetty kenttäintegraaliyhtälö $J\text{-}CFIE_{PEC}$ muutetaan matriisimuotoon testaamalla yhtälöä (131), jolloin matriisin alkiot ovat

$$A_{mn}^{J\text{-}CFIE_{PEC}} = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{f}_n \, dS - \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathcal{L}(\mathbf{f}_n) \, dS - \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{f}_n) \, dS, \quad (159)$$

ja yhdistetyn kenttäintegraaliyhtälön lähdevektorin alkiot on

$$b_m^{J\text{-}CFIE_{PEC}} = \frac{1}{\eta} \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{E}^p \, dS + \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{H}^p \, dS. \quad (160)$$

Nyt on siis saatu neljä lineaarista yhtälöryhmää. N-formulaatio $N\text{-}EFIE_{DB}$ ja $N\text{-}MFIE_{DB}$ ja yhdistetyt kenttäintegraaliyhtälöt $CFIE_{DB}$ DB-reunaehdolle, ja tangentiaalinen sähkökenttäintegraaliyhtälö $T\text{-}EFIE_{PEC}$ ja yhdistetty kenttäintegraaliyhtälö $J\text{-}CFIE_{PEC}$ PEC-reunaehdolle. Lisäksi olisi mahdollista käyttää tangentiaalisia $T\text{-}EFIE_{DB}$ ja $T\text{-}MFIE_{DB}$ yhtälöitä DB-reunaehdolle ja $N\text{-}MFIE_{PEC}$

yhtälöä PEC-reunaehdolle. Seuraavassa kappaleessa tarkastellaan kuinka edellä esiteltyjen matriisien ja lähdevektoreiden alkiot voidaan numeerisesti laskea.

5 Integraalien numeerinen laskeminen

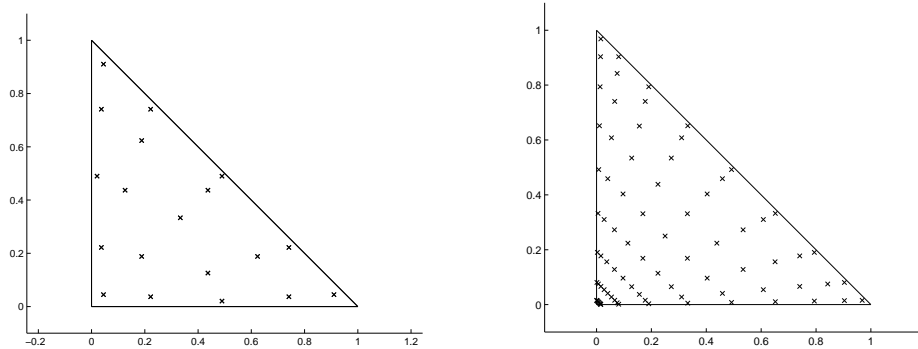
Integraalien numeeriseen laskemiseen on monia eri vaihtoehtoja, mutta tässä työssä on käytetty Gaussin kvadratuuria ja singulaaristen integraalien laskemiseen on käytetty Duffyn menetelmää [25]. Perusidea näissä numeerisissa integroimismenetelmissä on kertoa integroitavan funktion arvoja määrätyissä pisteissä tietyillä painokertoimilla ja summaamalla nämä yhteen eli

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^K w_k f(x_k), \quad (161)$$

missä w_k ja x_k ovat integroimismenetelmän painokertoimet ja pisteet.

5.1 Numeerinen integrointi kolmioelementillä

Koska geometrian pinta on diskretoitu käyttäen kolmioelementtejä, voidaan Gaussin ja Duffyn painokertoimet ja -pisteet muodostaa ensin referenssikolmiolle, ja tämän jälkeen ne voidaan kuvata mielivaltaiselle kolmioelementille lineaarikuvauksen \mathcal{F}_n avulla. Referenssielementti on kolmio, jonka kärkipisteet ovat (0,0), (1,0) ja (0,1). Kuvassa 19 nähdään Gaussin ja Duffyn integroimispisteet referenssielementillä.



Kuva 19: Vasemmalla puolella on Gaussin integroimispisteet referenssielementillä ja oikealla puolella on Duffyn integroimispisteet referenssielementillä singulaarisuuden ollessa origossa.

Tarkastellaan integroituvan funktion $f(\mathbf{r})$ numeerista integrointia yli mielivaltaisen kolmion T , jonka kärkipisteet ovat \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 ja \mathbf{p}_3 . Integraali yli mielivaltaisen kolmion T_n voidaan muuttaa integraaliksi yli referenssikolmion \hat{T} tekemällä muuttujanvaihto $\mathbf{r} = \mathcal{F}(\hat{\mathbf{r}})$, missä $\hat{\mathbf{r}}$ on jonkin integroimismenetelmän piste referenssikolmiolla. Integraali yli yleisen kolmion T_n voidaan esittää muodossa

$$\int_{T_n} f(\mathbf{r}) dS = \int_{\hat{T}} f(\mathcal{F}_n(\hat{\mathbf{r}})) |\det(J_{\mathcal{F}_n})| d\hat{S}, \quad (162)$$

missä $J_{\mathcal{F}_n}$ on kuvauksen $\mathcal{F}_n(\xi, \eta)$ Jacobin matriisi

$$J_{\mathcal{F}_n} = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_n(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \frac{\partial \mathcal{F}_n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right]. \quad (163)$$

Kappaleessa 4.1.1 määriteltiin lineaarikuvaus

$$\mathcal{F}_n(\xi, \eta) = (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)\xi + (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)\eta + \mathbf{p}_1, \quad (164)$$

joten Jacobin matriisiksi saadaan

$$J_{\mathcal{F}_n} = [\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1]. \quad (165)$$

Jacobin matriisin determinantti on

$$|\det(J_{\mathcal{F}_n})| = |(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)| = 2A_{T_n}, \quad (166)$$

missä A_{T_n} on kolmion T_n pinta-ala. Näin ollen integraali yli yleisen kolmion on

$$\int_{T_n} f(\mathbf{r}) \, dS \approx 2A_{T_n} \sum_{k=1}^K \hat{w}_k f(\mathcal{F}_n(\hat{\mathbf{r}})), \quad (167)$$

missä \hat{w}_k pisteeseen $\hat{\mathbf{r}}$ liittyvä jonkin integroimismenetelmän painokerroin.

5.2 Matriisialkioiden numeerinen laskeminen

Tarkastelemalla DB-reunaehdon N-formulaation ja yhdistetyn integraaliyhtälön systeemimatriiseja (152) ja (155) ja PEC-reunaehdon T-EFIE:n ja J-CFIE:n systeemimatriiseja (157) ja (159), nähdään että matriisien alkiot muodostuvat vakioita lukuunottamatta seitsämästä eri integraalista

$$\begin{aligned} I_{mn}^1 &= \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathcal{S}(\mathbf{f}_n) \, dS, & I_{mn}^2 &= \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathcal{S}(\mathbf{f}_n) \, dS \\ I_{mn}^3 &= \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{f}_n) \, dS, & I_{mn}^4 &= \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathcal{K}(\mathbf{f}_n) \, dS \\ I_{mn}^5 &= \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{f}_n \, dS, & I_{mn}^6 &= \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{f}_n \, dS \\ I_{mn}^7 &= \int_S \mathbf{f}_m \cdot \mathcal{L}(\mathbf{f}_n) \, dS. \end{aligned} \quad (168)$$

Tarkastellaan ensiksi integraalia I_{mn}^1 . Sijoittamalla yksikerrospotentiaali \mathcal{S} integraaliin ja vaihtamalla piste- ja ristitulon paikat saadaan

$$I_{mn}^1 = - \int_S \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \times \int_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' dS. \quad (169)$$

Pinnan S yli oleva integraali voidaan muuttaa integraaliksi yli kolmioiden. Testifunktio \mathbf{f}_m saa nollasta poikkeavia arvoja kolmioilla T_{m_p} , missä $p = 1, 2, \dots, P$. Vastaavasti kantafunktio \mathbf{f}_n saa nollasta poikkeavia arvoja kolmioilla T_{n_q} , missä $q = 1, 2, \dots, Q$. P :n ja Q :n arvot riippuvat käytetyistä kanta- ja testifunktioista. RWG-funktiolle $P = Q = 2$. Nyt integraali (169) voidaan esittää muodossa

$$I_{mn}^1 = - \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \int_{T_{m_p}} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \times \int_{T_{n_q}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' dS. \quad (170)$$

Määritellään integraali \hat{I}_{mn}^1

$$\hat{I}_{mn}^1 = - \int_{T_{m_p}} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \times \int_{T_{n_q}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' dS, \quad (171)$$

jolloin

$$I_{mn}^1 = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \hat{I}_{mn}^1. \quad (172)$$

Samalla tavalla integraalit I_{mn}^j voidaan laskea integraalien \hat{I}_{mn}^j avulla kaavalla

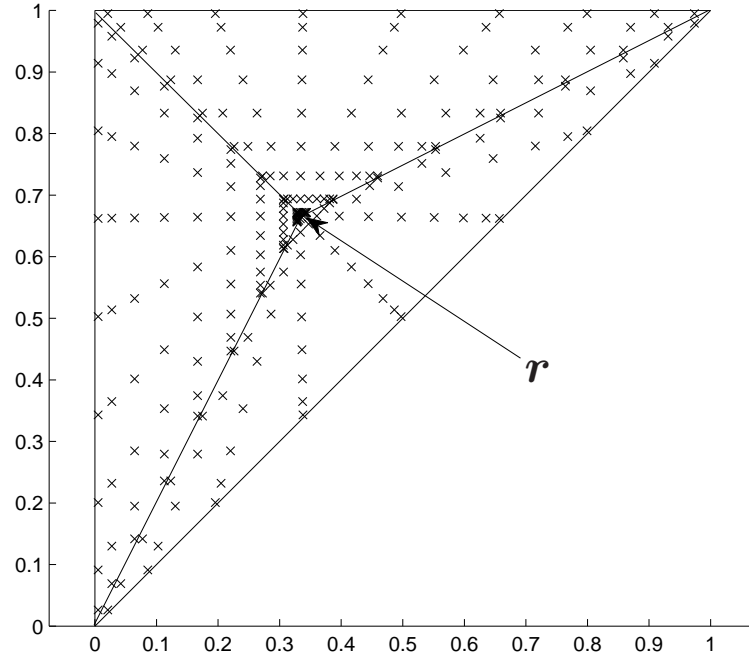
$$I_{mn}^j = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \hat{I}_{mn}^j, \quad (173)$$

missä $j = 2, \dots, 7$.

Ero integraalien \hat{I}_{mn}^1 ja \hat{I}_{mn}^2 välillä on vain ristitulo, joten

$$\hat{I}_{mn}^2 = \int_{T_{m_p}} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \times \int_{T_{n_q}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' dS. \quad (174)$$

Integraalit (171) ja (174) voidaan laskea Gaussin kvadratuurilla, jos kolmiot T_n ja T_m eivät ole samat. Jos kolmiot ovat samat eli $T_n = T_m$, integraalin laskemiseen käytetään Duffyn menetelmää. Tässä tapauksessa kolmio jaetaan kolmeen alikolmioon siten, että pisteestä \mathbf{r} tulee jokaisen alikolmion kärkipiste. Kuva 20 esittää Duffyn pisteet kuvattuna kolmelle alikolmiolle singulaarisuuden ollessa pisteessä \mathbf{r} .



Kuva 20: Jos kolmiot T_m ja T_n ovat samat, jaetaan kolmio T_n kolmeen alikolmioon pisteestä \mathbf{r} . Duffyn integroimispisteet kuvataan jokaiselle alikolmiolle siten, että referenssikolmion origo kuvautuu pisteeseen \mathbf{r} .

Tarkastellaan seuraavaksi integraalia \hat{I}_{mn}^3 . Sijoittamalla siihen operaattori \mathcal{K} saadaan

$$\hat{I}_{mn}^3 = \int_{T_{mp}} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \nabla \times \int_{T_{nq}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' dS. \quad (175)$$

Viemällä roottori integraalin sisään, käyttämällä yhtälöä $\nabla G = -\nabla' G$ ja vaihtamalla piste ja ristitulon paikkaa voidaan ylläoleva integraali esittää muodossa

$$\hat{I}_{mn}^3 = \int_{T_{mp}} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{T_{nq}} \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' dS. \quad (176)$$

Jakamalla gradientti pintaa vastaan kohtisuoraan ja pinnan suuntaiseen komponenttiin

$$\nabla' = \nabla'_n + \nabla'_s = \mathbf{n}' \partial_n + \nabla'_s = \mathbf{n}' \partial_n - \mathbf{n}' \times \mathbf{n}' \times \nabla' \quad (177)$$

voidaan integraali (176) esittää muodossa

$$\begin{aligned} \hat{I}_{mn}^3 &= \int_{T_{mp}} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{T_{np}} \frac{\partial' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{r}')} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' dS \\ &- \int_{T_{mp}} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{T_{nq}} \mathbf{n}(\mathbf{r}') (\nabla'_s G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')) dS' dS. \end{aligned} \quad (178)$$

Osittaisintegroimalla, käyttämällä Gaussin lausetta ja vaihtamalla integroimisjärjestystä voidaan integraali kirjoittaa

$$\begin{aligned} \hat{I}_{mn}^3 &= \int_{T_{mp}} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{T_{nq}} \frac{\partial' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{r}')} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' dS \\ &+ \int_{\partial T_{nq}} (\mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{m}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')) \mathbf{n}(\mathbf{r}') \cdot \int_{T_{mp}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS dl' \\ &- \int_{T_{mp}} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}') \int_{T_{nq}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'_s \cdot (\mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')) dS' dS, \end{aligned} \quad (179)$$

missä $\mathbf{m}(\mathbf{r}')$ on reunan ∂T_n yksikköulkonormaalivektori. Samalla tavalla saadaan integraali \hat{I}_{mn}^4 muotoon

$$\begin{aligned} \hat{I}_{mn}^4 &= - \int_{T_{mp}} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{T_{nq}} \frac{\partial' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{r}')} \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' dS \\ &- \int_{\partial T_{nq}} (\mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{m}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')) \mathbf{n}(\mathbf{r}') \cdot \int_{T_{mp}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS dl' \\ &+ \int_{T_{mp}} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}') \int_{T_{nq}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'_s \cdot (\mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')) dS' dS. \end{aligned} \quad (180)$$

On myös hyvä huomata, että käytettäessä RWG kantafunktioita kolmas termi häviää integraaleista (179) ja (180), koska $\mathbf{n} \times RWG$ on divergenssitön. Silmukkakantafunktiot saadaan summaamalla yhteen RWG-kantafunktioita, joten kolmas termi on nolla myös silmukkakantafunktiolle. Lineariselle kantafunktiolle

$$\nabla'_s \cdot (\mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{f}_n^{LL}(\mathbf{r}')) = -\frac{1}{A_{T_n}} (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_{i+1}), \quad (181)$$

missä \mathbf{u}_i ja \mathbf{u}_{i+1} kolmion T_n särmien vektorit, joihin kantafunktio \mathbf{f}_n ei liity ja A_{T_n} on kolmion ala.

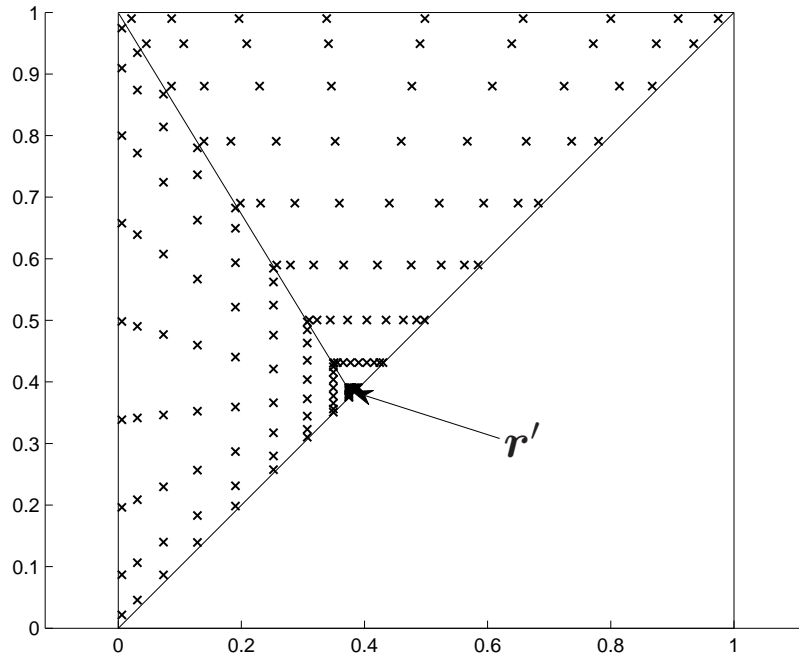
Nyt integraalit (179) ja (180) eivät ole enää niin voimakkaasti singulaarisia, koska pintagradientti saatiin hävitettyä sisäintegraalista. Samalla kuitenkin kolmion T_n yli oleva pintaintegraali muuttui yksiulotteiseksi integraaliksi sen särmien ∂T_n yli.

Greenin funktion normaaliderivaatta voidaan laskea analyttisesti:

$$\frac{\partial' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} = \frac{e^{ikR}}{R^3} (ikR - 1) (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}'), \quad (182)$$

missä $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Jos testi- ja kantakolmiot ovat samat, Greenin funktion normaaliderivaatta on nolla, joten yhtälöiden (179) ja (180) ensimmäinen termi ei ole singulaarinen ja se voidaan integroida käyttäen Gaussin kvadratuuria. Kolmas termi ei myöskään ole singulaarinen, koska integraali on nolla, jos kolmiot T_m ja T_n ovat samassa tasossa.

Keskimmäinen termi on singulaarinen, jos testikolmio T_n ja kantakolmio T_m jakavat yhteisen särmän ja ovat eri tasossa. Jos kolmiot jakavat yhteisen särmän ja ovat samassa tasossa, integraalista tulee nolla. Singulaarinen integraali voidaan laskea jakamalla testikolmio kahteen alikolmioon pisteestä \mathbf{r}' eli särmällä ∂T_n olevasta Gaussin pisteestä ja muodostamalla Duffyn integroimispisteet ja painokertoimet alikolmioille. Kuvassa 21 nähdään kolmion T_m alikolmioille muodostetut Duffyn pisteet singulaarisessa tapauksessa.



Kuva 21: Duffyn integroimispisteet kuvattuna kolmion T_n alikolmioille singulaarisuuden ollessa yhteisellä särmällä.

Integraalit \hat{I}_{mn}^5 ja \hat{I}_{mn}^6 eivät sisällä Greenin funktiota, joten ne eivät ole singulaarisia ja ne voidaan integroida Gaussin menetelmällä.

Kirjoittamalla integraalin \hat{I}_{mn}^7 operaattori \mathcal{L} auki

$$\hat{I}_{mn}^7 = \int_{T_{mp}} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \left[\frac{1}{ik} \nabla \mathcal{S}(\nabla'_s \cdot \mathbf{f}_n)(\mathbf{r}) + ik \mathcal{S}(\mathbf{f}_n)(\mathbf{r}) \right] dS, \quad (183)$$

huomataan, että jälkimmäinen termi on vakioita lukuunottamatta sama kuin \hat{I}_{mn}^2 . Ensimmäinen termi on puolestaan hypersingulaarinen, joten sitä pitää muokata vähemmän singulaariseksi, koska hypersingulaarinen funktio ei ole integroituva. Osittaisintegraimalla ensimmäistä termiä saadaan

$$\begin{aligned} & \int_{T_{mp}} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \frac{1}{ik} \nabla \mathcal{S}(\nabla'_s \cdot \mathbf{f}_n)(\mathbf{r}) dS \\ &= -\frac{1}{ik} \int_{T_{mp}} \nabla_s \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \mathcal{S}(\nabla'_s \cdot \mathbf{f}_n)(\mathbf{r}) dS + \frac{1}{ik} \int_{T_{mp}} \nabla_s \cdot (\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \mathcal{S}(\nabla'_s \cdot \mathbf{f}_n)(\mathbf{r})) dS. \end{aligned} \quad (184)$$

Soveltamalla divergenssilausesta integraalin (184) jälkimmäinen termi voidaan kirjoittaa

$$\frac{1}{ik} \int_{T_{mp}} \nabla_s \cdot (\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \mathcal{S}(\nabla'_s \cdot \mathbf{f}_n)(\mathbf{r})) dS = \frac{1}{ik} \int_{\partial T_{mp}} \mathbf{m}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \mathcal{S}(\nabla'_s \cdot \mathbf{f}_n)(\mathbf{r}) dl, \quad (185)$$

missä ∂T_m on kolmion T_m reuna ja \mathbf{m}_m on reunan ∂T_m yksikköulkonormaali.

RWG-kantafunktioiden tapauksessa $\mathbf{m}_m \cdot \mathbf{f}_m$ on nolla kolmioparin muilla särmillä, paitsi yhteisellä särmällä. Koska $\mathbf{m}_{m_1} \cdot \mathbf{f}_{m_1} = -\mathbf{m}_{m_2} \cdot \mathbf{f}_{m_2}$, integraalit kumoutuvat ja integraali (185) saa arvon nolla kolmioparilla. Näin ollen integraali \hat{I}_{mn}^7 voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} \hat{I}_{mn}^7 &= -\frac{1}{ik} \int_{T_{mp}} \nabla_s \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \int_{T_{nq}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'_s \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' dS \\ &\quad + \int_{T_{mp}} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot ik \mathcal{S}(\mathbf{f}_n)(\mathbf{r}) dS. \end{aligned} \quad (186)$$

RWG-kantafunktion divergenssi on paloittain vakio, joten integraali voidaan laskea Gaussin menetelmällä, jos kolmiot eivät ole samat. Kolmioiden ollessa samat jaetaan kantan kolmio Gaussin integroimis pisteestä kolmeen osakolmioon ja muodostetaan osakolmioille Duffyn integroimis pisteet ja painot samalla periaatteella kuin integraalin \hat{I}_{mn}^1 tapauksessa.

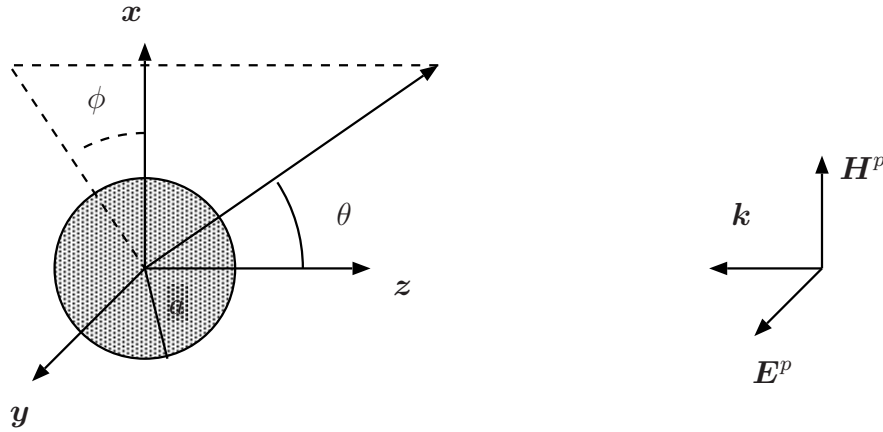
Lähdevektoreiden \mathbf{b}^{nDB} , $\mathbf{b}^{CFIE_{DB}}$, $\mathbf{b}^{T-EFIE_{PEC}}$ ja $\mathbf{b}^{J-CFIE_{PEC}}$ alkioiden laskeminen voidaan tehdä suoraan Gaussin kvadratuurilla, koska ne eivät ole singulaarisia, kun lähde on kaukana.

6 Tulokset

Tässä kappaleessa esitellään pintaintegraaliyhtälömenetelmällä lasketut tulokset erilaisille DB- ja PEC-kappaleille. Sironta on laskettu pallolle, kuutiolle, laatikolle ja puolipallolle. Lisäksi pallolle, puolipallolle ja kuutiolle on laskettu polarisoituvuus käyttäen pintaintegraaliyhtälömenetelmää. Ekvivalenttien pintavirtatiheyksien käyttäytymistä on tarkasteltu erikokoisten DB- ja PEC-pallojen pinnoilla, ja pintavirtatiheyksien singulaarisuuksia on tarkasteltu kuution terävällä särmällä. Lisäksi pallolle ja kuutiolle on laskettu sirontatehokkuus.

6.1 Sironta pallosta

Sähkömagneettisen säteilyn sironta pallosta on perinteinen sirontaongelma, jolle voidaan löytää analyttinen ratkaisu Mie-sarjan avulla [7]. Pallon koon ollessa paljon pienempi kuin aallonpituus voidaan sironneet kentät laskea myös kvasistaattisen analyysin avulla [26]. Tässä kappaleessa tarkastellaan pintaintegraaliyhtälömenetelmällä laskettua sirontaa erikokoisista DB- ja PEC-palloista ja saatuja tuloksia verrataan Mie-sarjalla ja kvasistatiikalla saatuihin tuloksiin. Lisäksi tarkastellaan ekvivalenttien pintavirtojen käyttäytymistä pallon pinnalla.

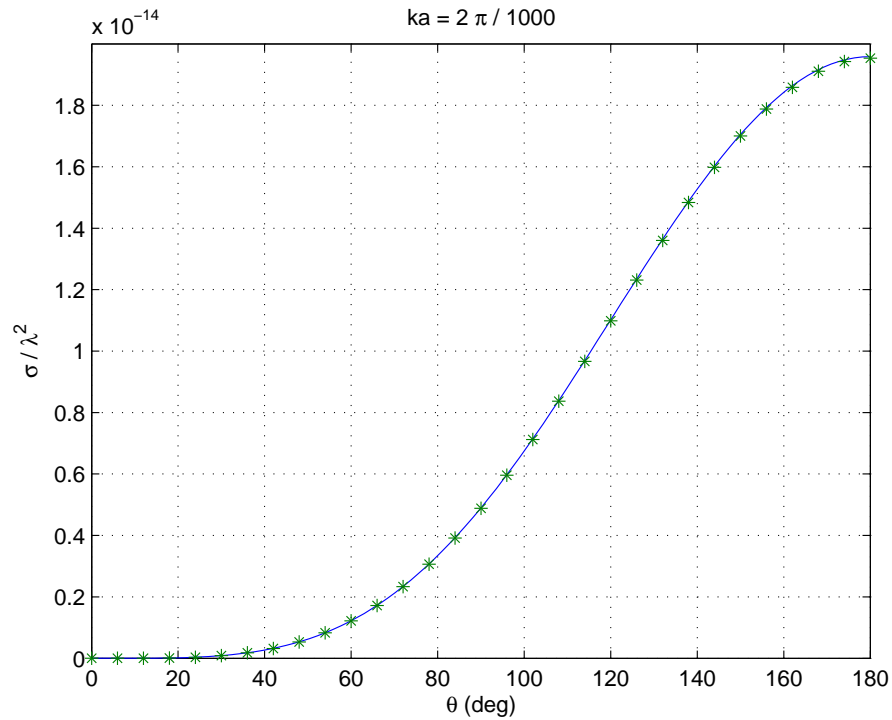


Kuva 22: Tehtävän geometria. a -säteisen pallon keskipiste on origossa, ja lineaarisesti polarisoitunut tasoaalto tasoaalto etenee $-z$ -akselin suuntaan. Tarkastelupiste määritellään kulmien ϕ ja θ avulla.

Kuvassa 22 on esitetty laskettavan tehtävän geometria. Pallon keskipiste sijaitsee origossa ja sen säde on a . Herättävänä kenttänä toimii lineaarisesti polarisoitunut tasoaalto, joka etenee $-z$ -akselin suuntaan. Herättävä sähkökenttä on y -akselin suuntainen ja magneettikenttä x -akselin suuntainen. Lasketut tulokset esitetään sähkökentän tasossa eli E-tasossa, joka on yz -taso ($\phi = 90$ astetta) ja magneettikentän tasossa eli H-tasossa, joka on xz -taso ($\phi = 0$ astetta). Kulman θ ollessa nolla puhutaan takaisinsironnasta ja eteenpäinsironnasta, jos $\theta = 180$ astetta.

6.1.1 Sironta Rayleigh-alueella

Kun pallon koko on riittävän pieni suhteessa aallonpituuteen, eli ollaan Rayleigh-alueella, voidaan sironnut kaukokenttä laskea dipolimomenttien avulla, jotka saadaan kvasistaattisesta analyysistä. Korkeamman asteen multipoleista aiheutuneet kentät vaimenevat nopeasti etäisyyden kasvaessa, joten sirottaja näyttää kaukaa katsottuna dipolilta. DB-pallolle on tehty kvasistaattinen analyysi viitteessä [27]. Kuvassa 23 nähdään pienen DB-pallon normalisoitu sirontapoikkipinta laskettuna sekä kvasistatiikalla (yhtenäinen viiva) että pintaintegraaliyhtälömenetelmällä (tähdet). Integraaliyhtälöinä on käytetty $N\text{-}EFIE_{DB}$ ja $N\text{-}MFIE_{DB}$ yhtälöitä ja kantafunktioina on käytetty silmukkakantafunktioita. Sirontapoikkipinta on normalisoitu jakamalla se aallonpituuden neliöllä. Pallon säde on 1 m ja aallonpituus on 1000 m.



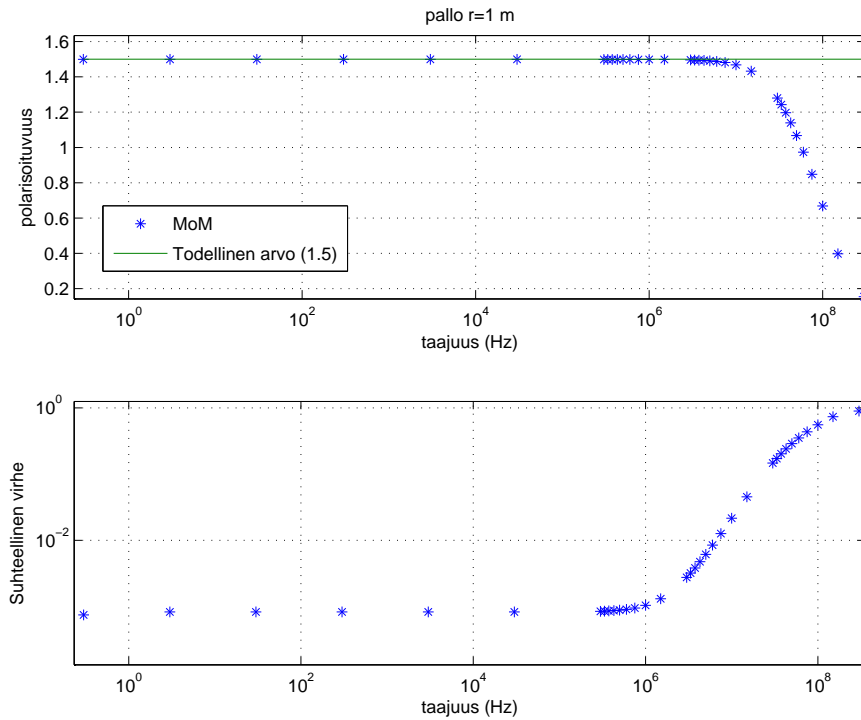
Kuva 23: Kvasistatiikalla (yhtenäinen viiva) ja pintaintegraaliyhtälömenetelmällä (tähdet) laskettu sirontapoikkipinta DB-pallolle, jonka säde on 1 m ja aallonpituus on 1000 m. Sirontapoikkipinta on samanlainen E- ja H-tasoissa.

Kuvasta 23 nähdään, että pintaintegraaliyhtälömenetelmällä laskettu sirontapoikkipinta on hyvin lähellä kvasistatiikalla laskettua sirontapoikkipintaa, joten pintaintegraaliyhtälöt näyttäisivät antavan melko hyvän tuloksen DB-pallolle Rayleigh-alueella. On hyvä huomata, että Rayleigh-alueella DB-pallon takaisinsironta on nolla ja bistaattisen tutkapoikkipinnan suuntakuvio ei riipu aallonpituudesta. Tietysti Rayleigh-alueen ulkopuolella sirontakuvioon tulee aallonpituus riippuvuus. Lisäksi sirontapoikkipinta on riippumaton kulmasta ϕ , koska DB-reunaehto on symmetrinen ja pallo on symmetrinen kappale. Tämä tarkoittaa, että sirontapoikkipinta on

samanlainen E- ja H-tasoissa.

6.1.2 Staattinen polarisoituvuus

Staattinen polarisoituvuus voidaan ratkaista numeerisesti riittävän matalalla taajuudella lasketun eteenpäinsironneen tutkapoikkipinnan avulla kaavan (68) mukaan.

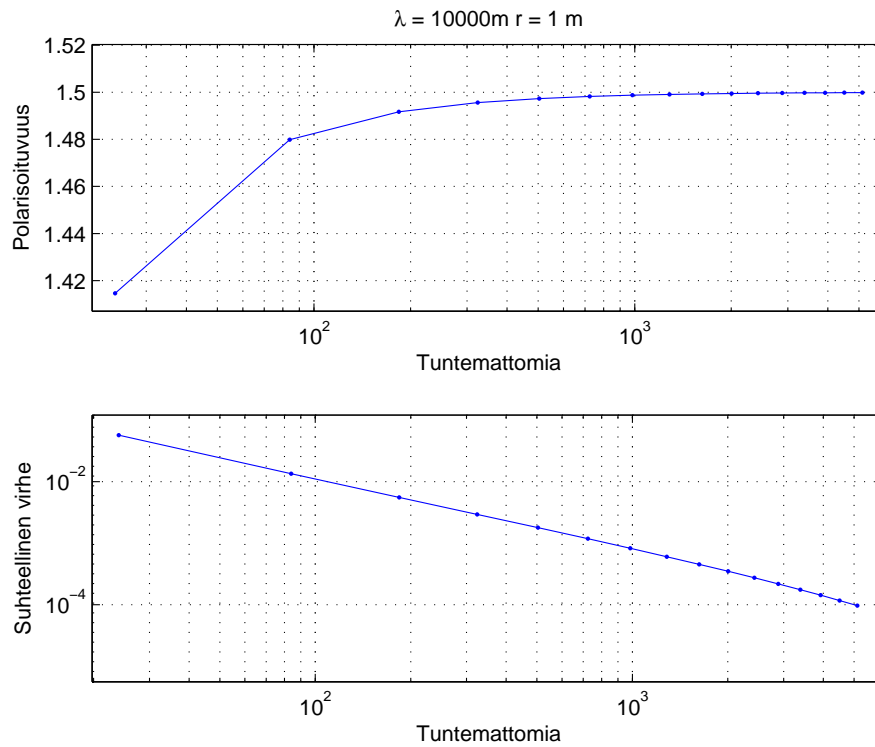


Kuva 24: Kuvan yläosassa on DB-pallon polarisoituvuus laskettuna momenttimenetelmällä kaavan (68) perusteella taajuuden funktiona. Alaosassa nähdään momenttimenetelmällä lasketun polarisoituvuuden suhteellinen virhe, kun tuntemattomia on 984 ja kantafunktioina on käytetty silmukakantafunktioita.

Kuvassa 24 on esitetty integraaliyhtälömenetelmällä laskettu staattinen polarisoituvuus taajuuden funktiona DB-pallolle, jonka säde on 1 m ja lasketun polarisoituvuuden suhteellinen virhe. Laskennassa on käytetty $N\text{-}EFIE_{DB}$ ja $N\text{-}MFIE_{DB}$ yhtälöitä ja silmukakantafunktioita tuntemattomien määrän ollessa 984. Polarisoituvuus on hyvin lähellä oikeaa arvoa, kun taajuus on matalampi kuin 1 MHz. Tämä tarkoittaa, että polarisoituvuus voidaan määrittää sirontapoikkipinnan avulla, jos aallonpituus on suurempi kuin 100 kertaa pallon halkaisija. Mentäessä kohti matalampia taajuuksia ratkaisu pysyy stabiilina lähes nollataajuudelle eli statiikkaan asti. Käytetty pintaintegraaliyhtälömenetelmä on kuitenkin dynamiikan menetelmä, joten statiikan ongelmia sillä ei pysty ratkaisemaan, vaikka hyvin matalille taajuuksille päästäänkin. Yleisesti integraaliyhtälömenetelmä kärsii niin sanotusta matalan taajuuden ongelmasta, jolloin ratkaisu hajoaa riittävän matalalle taajuudelle men-

täessä. Esimerkiksi PEC-reunaehdon tapauksessa $T-EFIE_{DB}$ yhtälöstä jää oleellisesti vain pintavirtatiheyden divergenssiä kuvaava osa, kun taajuus lähenee nollaa. Pintavirtatiheyttä ei voida ratkaista yksikäsitteisesti yhtälöstä, missä esiintyy vain sen pintadivergenssi. Tätä ongelmaa ei kuitenkaan ole DB-reunaehdon tapauksessa.

Tuntemattomien määrän ollessa 984 polarisoituvuuden suhteellinen virhe on luokkaa 10^{-3} . Lisäksi virhe on systemaattista eli laskettu polarisoituvuus jää aina hieman pienemmäksi kuin oikea arvo riippumatta taajuudesta. Tämä virhe johtuu todennäköisesti integraalien numeerisesta laskennasta ja geometrian diskretoinnista. Geometrian diskretointi on tehty lineaarisilla kolmioelementeillä, mutta pallon kuvaamiseen vaadittaisiin kaarevia elementtejä. Pallon säde on laskettu diskretoidun pallon pinta-alasta, jolloin diskretoinnin virhettä saadaan pienennettyä. Ratkaisun tarkkuutta voidaan parantaa lisäämällä elementtien määrää, jolloin geometria lähenee palloa. Lisäksi integraalien numeerisen laskennan tarkkuus paranee. Kuvassa 25 nähdään kuinka ratkaisu suppenee kohti oikeaa arvoa kun elementtien määrää lisätään.



Kuva 25: Polarisoituvuuden suppeneminen tuntemattomien funktiona, kun pallon säde on $\frac{\lambda}{10000}$. Laskennassa on käytetty silmukkakantafunktioita ja $N-EFIE_{DB}$ ja $N-MFIE_{DB}$ yhtälöitä.

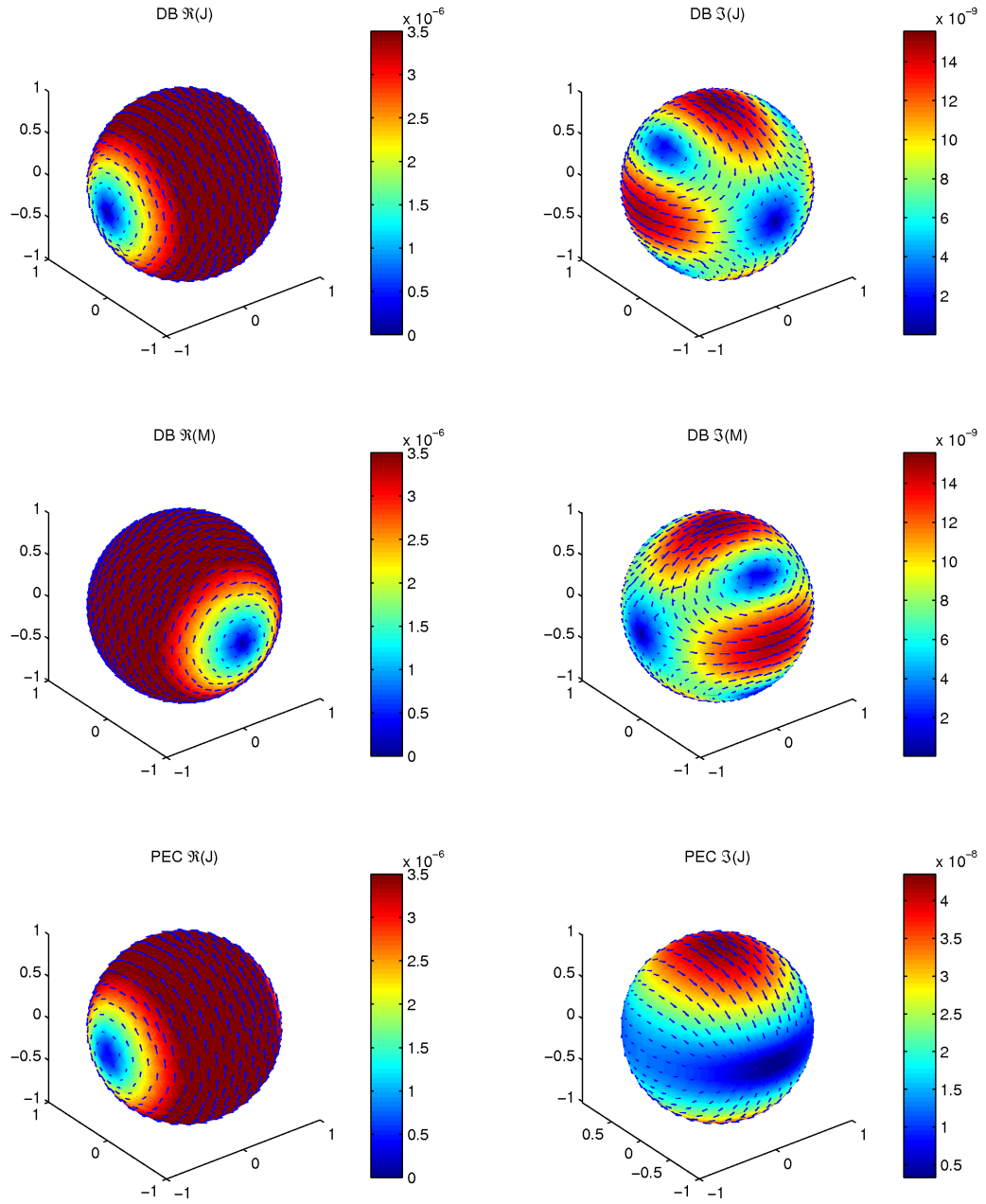
6.1.3 Pintavirtatiheyksien käyttäytyminen pallon pinnalla

Tarkastellaan seuraavaksi ekvivalenttien sähköisten ja magneettisten pintavirtatiheyksien käyttäytymistä DB- ja PEC-pallojen pinnalla. Kuvassa 26 ylimmällä rivillä nähdään normalisoidun ekvivalentin sähköisen pintavirtatiheyden reaali- ja imaginääriosat DB-pallolle, jonka säde on 1 m ja aallonpituus 1000 m. Keskimmaisella rivillä nähdään vastaavat magneettiselle pintavirtatiheydelle. Alimmalla rivillä on esitetty ekvivalentti sähköinen pintavirtatiheys vastaavalle PEC-pallolle. Kannattaa huomata, että PEC-reunaehdon tapauksessa magneettista pintavirtatiheyttä ei synny. Pintavirtatiheyksien suunnat on esitetty nuolilla, ja pinnan väri kuvaa ekvivalenttien pintavirtatiheyksien normalisoitua amplitudia $\tilde{\mathbf{J}} = \sqrt{\mu}\mathbf{J}$ ja $\tilde{\mathbf{M}} = \sqrt{\epsilon}\mathbf{M}$. Kuvassa 27 nähdään suuremman ($ka = 4$) DB- ja PEC-pallojen ekvivalentit pintavirtatiheydet. Pallon kokoparametrissa ka , k on aaltoluku ja a on pallon säde. Pintavirtatiheydet on laskettu $N\text{-EFIE}_{DB}$, $N\text{-MFIE}_{DB}$ ja $T\text{-EFIE}_{PEC}$ yhtälöillä, ja kantafunktioina on käytetty RWG-kantafunktioita.

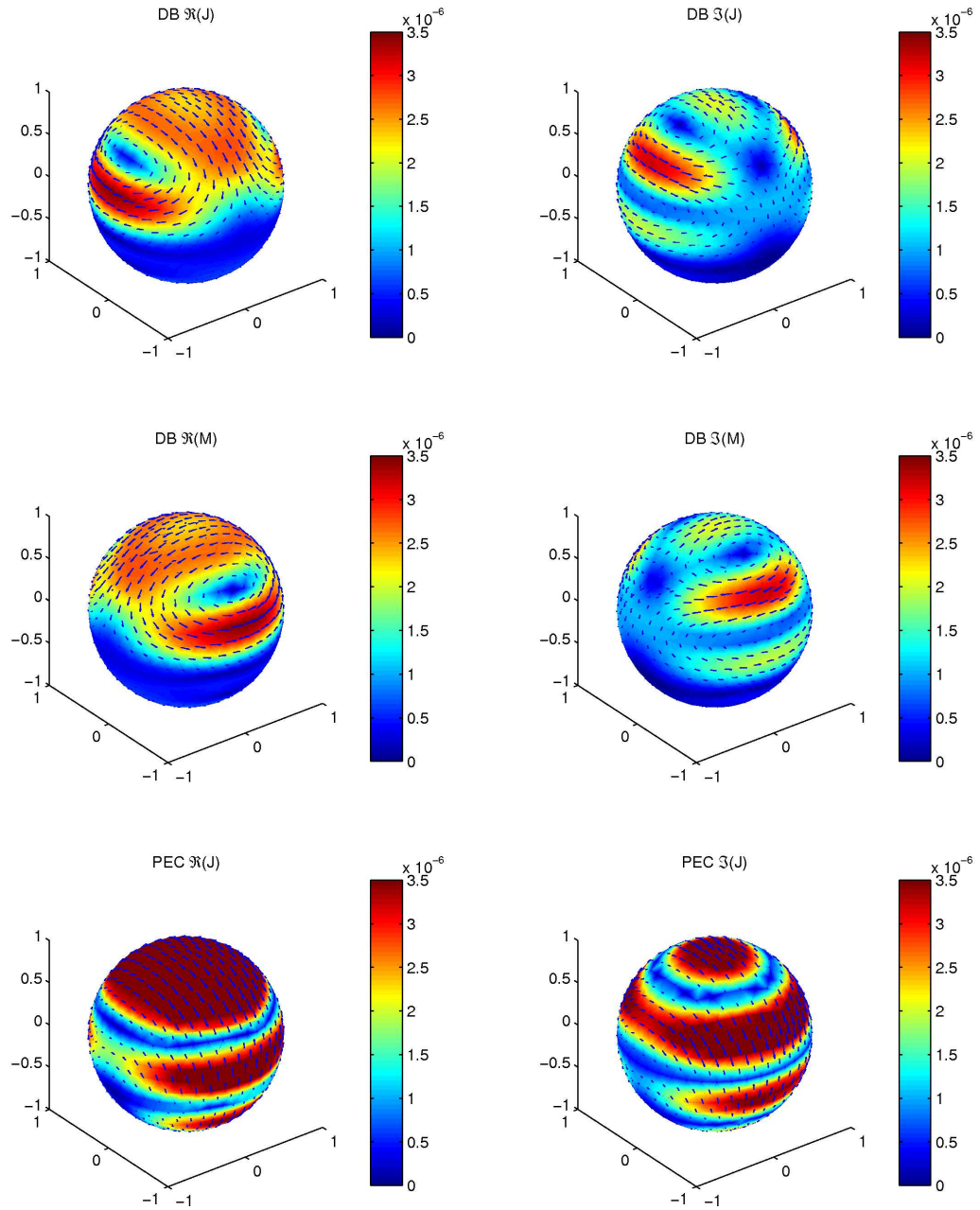
Matalilla taajuuksilla eli Rayleigh-alueella oltaessa DB-pallon pintavirtojen reaali-osat kiertävät koko pallon kahden nollakohdan ympäri eli palloon muodostuu yksi iso virtasilmukka. Tämä on siis yksinkertaisin mahdollinen silmukka, joka voi muodostua pallon pinnalle. Tästä syystä sirontakuvio pysyy samanlaisena matalilla taajuuksilla oltaessa. Virtojen imaginääriosaan muodostuu puolestaan neljä virtasilmukkaa, jolloin nollakohtia on kuusi. Imaginääriosan amplitudi on myös huomattavasti pienempi kuin reaali-osan amplitudi, joten sironta määräytyy pitkälti pintavirtatiheyksien reaali-osasta. Ekvivalentti magneettinen pintavirtatiheys käyttäytyy samanlaisesti kuin sähköinen mutta se on kääntynyt 90 astetta. Sähköisen ja magneettisen pintavirtatiheyksien amplitudit ovat samat, koska kysessä on normalisoidut pintavirtatiheydet.

PEC-pallon tapauksessa sähköisen pintavirtatiheyden reaali-osa on lähes samanlainen kuin DB-pallon tapauksessa, mutta imaginääriosassa on selvä ero. PEC-pallon pintavirtatiheyden imaginääriosassa havaitaan selvästi divergenssiä toisin kuin DB-pallolla, missä reunaehto vaatii ekvivalenttien pintavirtatiheyksien divergenssittömyyden.

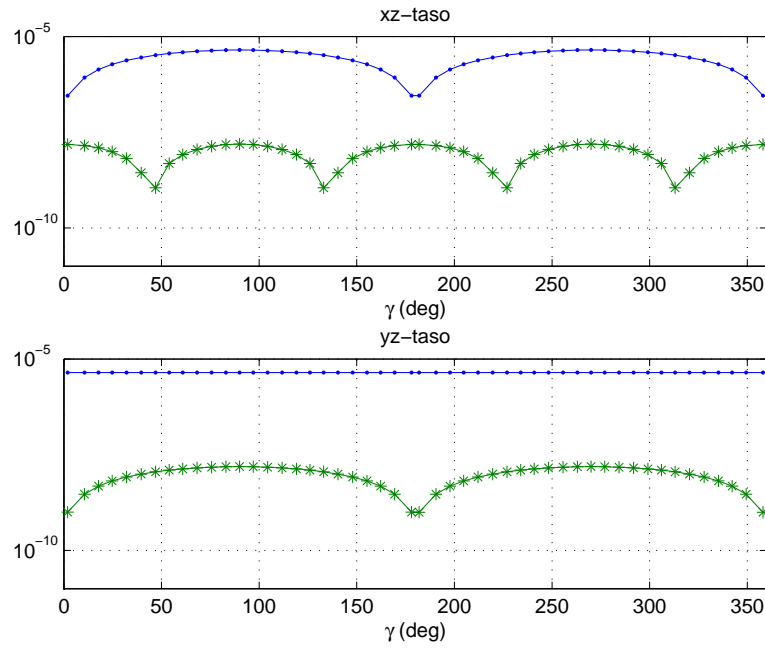
Pallon koon kasvaessa suhteessa aallonpituuteen pintavirtojen käyttäytyminen monimutkaistuu. Tämä johtuu siitä, että herättävän kentän vaihe muuttuu selvästi pallon alueella, kun pallo on iso suhteessa aallonpituuteen. DB-pallon tapauksessa virtasilmukoiden määrä kasvaa. Uusia virtasilmukoita syntyy aina tietyllä aallonpituudella pallon valaistulle puolelle ja niitä syntyy joka kerta kaksi kappaletta yhtäaikaan. Kahden virtasilmukan syntyminen synnyttää aina neljä nollakohtaa. Lisäksi imaginääriosan amplitudi kasvaa pallon koon kasvaessa. Reaali-osa ja imaginääriosan amplitudit ovat suurin piirtein yhtäsuuret, kun aallonpituus on pallon halkaisijan kokoluokkaa. Liitteessä A on esitetty erikokoisille DB- ja PEC-palloille virtakuviot, ja niistä nähdään hyvin uusien virtasilmukoiden syntyminen.



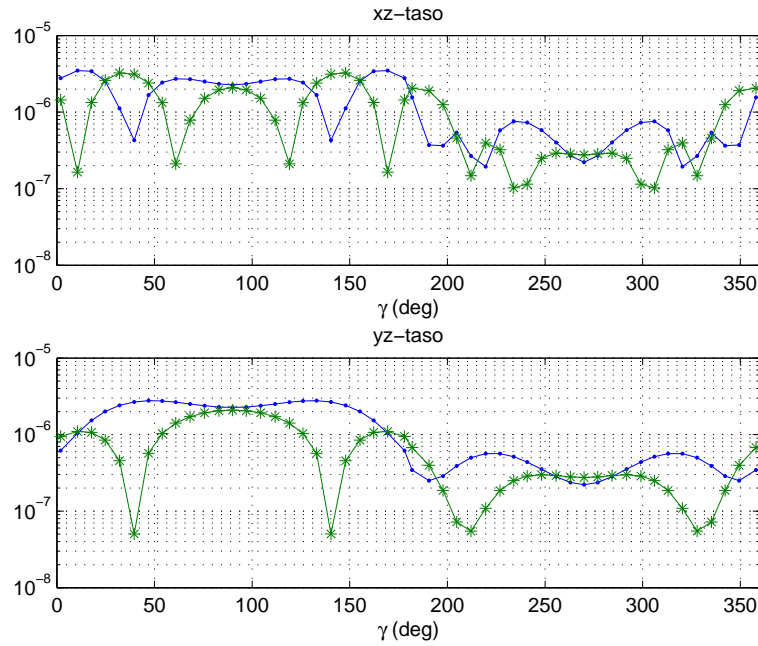
Kuva 26: Ekvivalenttien pintavirtatiheyksien reaali- ja imaginääriosat DB- ja PEC-pallolle, kun $ka = \frac{2\pi}{1000}$. Tasoaalto etenee $-z$ -akselin suuntaan ja sähkökenttä on polarisoitunut y -akselin suuntaisesti.



Kuva 27: Ekvivalenttien pintavirtatiheyksien reaali- ja imaginääriosat DB- ja PEC-pallolle, kun pallon kokoparametri on $ka = 4$.



Kuva 28: Sähköisen pintavirtatiheyden reaali- (pisteet) ja imaginääriosat (tähdet) DB-pallon pinnalla kahdessa eri leikkaustasossa, kun pallon kokoparametri on $ka = \frac{2\pi}{1000}$.



Kuva 29: Sähköisen pintavirtatiheyden reaali- (pisteet) ja imaginääriosat (tähdet) DB-pallon pinnalla kahdessa eri leikkaustasossa, kun pallon kokoparametri on $ka = 4$. Pallon valaistulla puolella virrat ovat voimakkaampia kuin pimeällä puolella.

6.1.4 Sironta korkeammilla taajuuksilla

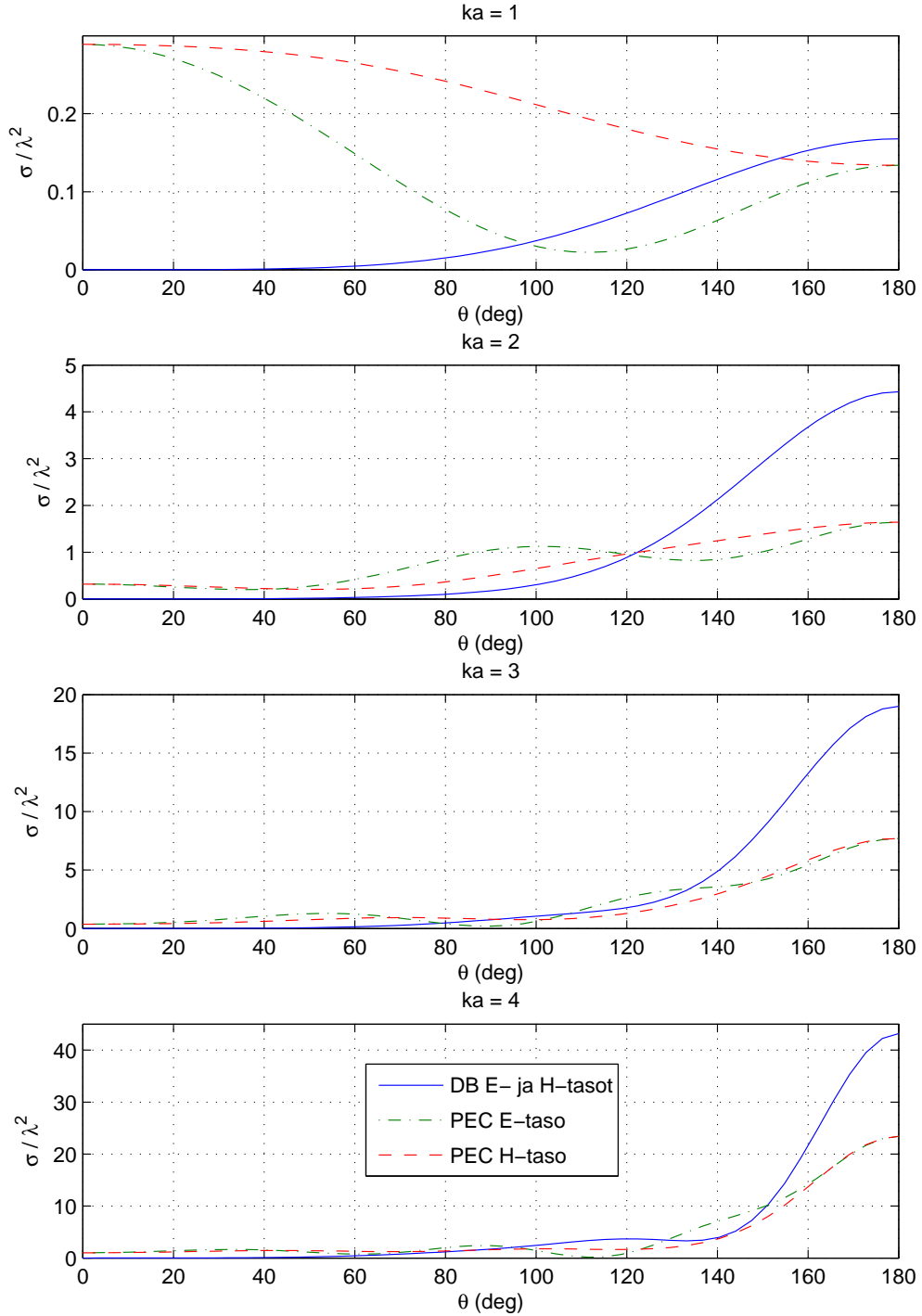
Mentäessä kohti korkeampia taajuuksia taajuuden vaikutus sironneen kentän säteilykuvioon voimistuu. Eteenpäinsironneen kentän keilanleveys kapenee ja maksimi-amplitudi kasvaa. Lisäksi säteilykuvioon syntyy sivukeiloja, mutta takaisinsironnut kenttä pysyy edelleen nollassa taajuudesta riippumatta. Pallon kokoparametrin ollessa $ka = 1$ eli aallonpituus on pallon ympärysmittan suuruinen bistaattinen sirontapoikkipinta on hyvin samankaltainen kuin Rayleigh-alueella, koska pintavirtatiheyden reaali-osa koostuu edelleen yhdestä silmukasta. Vasta tätä korkeammat taajuudet vaikuttavat merkittävästi säteilykuvioon. Kuvassa 30 nähdään normalisoitu sirontapoikkipinta eri kokoisista DB- ja PEC-palloista katselukulman funktiona. Tulokset DB-pallolle on laskettu yhdistetyllä integraaliyhtälöillä $CFIE_{DB}$ käyttäen silmukkakantafunktioita. PEC-pallolle tulokset on laskettu yhdistetyllä integraaliyhtälöillä $J-CFIE_{PEC}$ ja kantafunktioina on käytetty RWG-kantafunktioita. $CFIE$ yhtälöitä käytetään, jotta välttyttäisiin sisäresonanssien aiheuttamilta ongelmilta korkeilla taajuuksilla.

PEC-pallo on melko voimakas takaisinsirottaja verrattuna DB-palloon, mutta DB-pallo puolestaan sirottaa voimakkaasti eteenpäin. Lisäksi on hyvä huomata, että PEC-pallon tapauksessa sirontapoikkipinta on riippuvainen kulmasta ϕ , jolloin se on erilainen E- ja H-tasoissa. DB-pallon sirontapoikkipinta ei riipu kulmasta ϕ , joten sirontapoikkipinta on samanlainen E- ja H-tasoissa. Tämä johtuu DB-reunaehdon symmetriasta ja pallon geometrian symmetriasta.

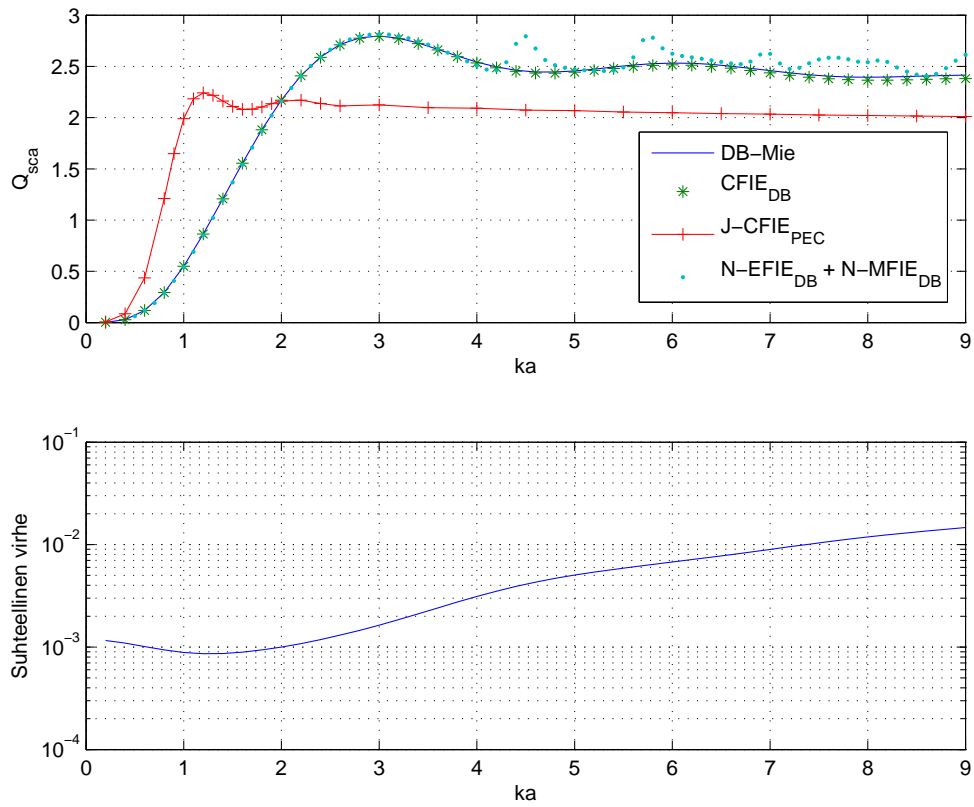
Sirontatehokkuus voidaan laskea integroimalla sirontapoikkipintaa koko avaruuskulman yli ja jakamalla se geometrisella poikkipinnalla. Kuvassa 31 nähdään pintaintegraaliyhtälömenetelmällä ja Mie-sarjan avulla laskettu DB-pallon sirontatehokkuus [7, 27] ja suhteellinen virhe. Lisäksi kuvassa on esitetty PEC-pallon sirontatehokkuus integraaliyhtälömenetelmällä laskettuna.

Katsottaessa kuvaa 31 nähdään, että sirontatehokkuuden maksimi saavutetaan DB-pallon kokoparametrin ollessa noin kolme, jolloin pallon ympärysmitta on kolme aallonpituutta. Pallon koon pienentyessä sirontatehokkuus pienenee nopeasti lähelle nollaa ja koon kasvaessa se lähenee aaltoilevasti kohti arvoa kaksi. Tässä kohtaa on hyvä mainita, että kaikkien häviöttömien kappaleiden sirontatehokkuus lähenee arvoa kaksi, kun taajuus lähenee ääretöntä [26]. Näin käy myös DB-pallon tapauksessa. PEC-pallon sirontatehokkuuden käyttäytyminen kokoparametrin funktiona on samantyyppinen kuin DB-pallon tapauksessa, mutta maksimi saavutetaan, kun $ka = 1,2$. Lisäksi kokoparametrin kasvaessa PEC-pallon sirontatehokkuus lähenee huomattavasti nopeammin kohti arvoa kaksi kuin DB-pallon sirontatehokkuus. Tuloksista nähdään, että PEC-pallo on voimakkaampi sirottaja DB-palloon verrattuna kun $ka < 2$. Jos $ka > 2$ DB-pallo on voimakkaampi sirottaja.

$CFIE_{DB}$ yhtälöillä laskettu sirontatehokkuus antaa lähes saman tuloksen kuin Mie-sarjan avulla laskettu. Kuvan 31 alaosassa nähdään $CFIE_{DB}$ yhtälöillä lasketun sirontatehokkuuden suhteellinen virhe pallon kokoparametrin ka funktiona. Selvästi havaitaan, että suhteellinen virhe kasvaa kokoparametriin verrannollisesti, eli kään-



Kuva 30: Erikokoisten DB- ja PEC-pallojen bistaattinen tutkapoikkipinta. Takaisinsironnassa $\theta = 0$ astetta ja eteenpäinsironnassa $\theta = 180$ astetta.



Kuva 31: Kuvassa ylhäällä nähdään DB- ja PEC-pallon sirontatehokkuus laskettuna integraaliyhtälömenetelmällä. Lisäksi sirontatehokkuus on laskettu DB-pallolle Mie-sarjan avulla. Kuvasta nähdään hyvin sisäresonanssien aiheuttamat ongelmat käytettäessä $N\text{-}EFIE_{DB}$ ja $N\text{-}MFIE_{DB}$ yhtälöitä. Ensimmäinen sisäresonanssi on kohdassa ($ka = 4,5$). Kuvan alaosassa nähdään $CFIE_{DB}$ yhtälöillä lasketun DB-pallon sirontatehokkuuden suhteellinen virhe.

täen verrannollisesti aallonpituuteen nähden. Tämä johtuu yksinkertaisesti siitä, että momenttimenetelmässä approksimoidaan pintavirtatiheyksiä kantafunktioiden avulla, joten approksimaation tarkkuus riippuu elementtien koosta. Kolmioelementtien koon tulisi olla huomattavasti pienempiä kuin aallonpituuden. Näin ollen taajuuden kasvaessa geometrian diskretointia pitäisi tihentää, mutta muistin tarve kasvaa elementtien määrän neliöön verrannollisesti, joten laskennan rajat tulevat nopeasti vastaan taajuuden kasvaessa. Käyttämällä niin sanottuja nopeita menetelmiä voitaisiin elementtien määrää lisätä huomattavasti, mutta nopeiden menetelmien implementointi on hyvin monimutkaista ja siksi ne sivuutetaan tässä työssä.

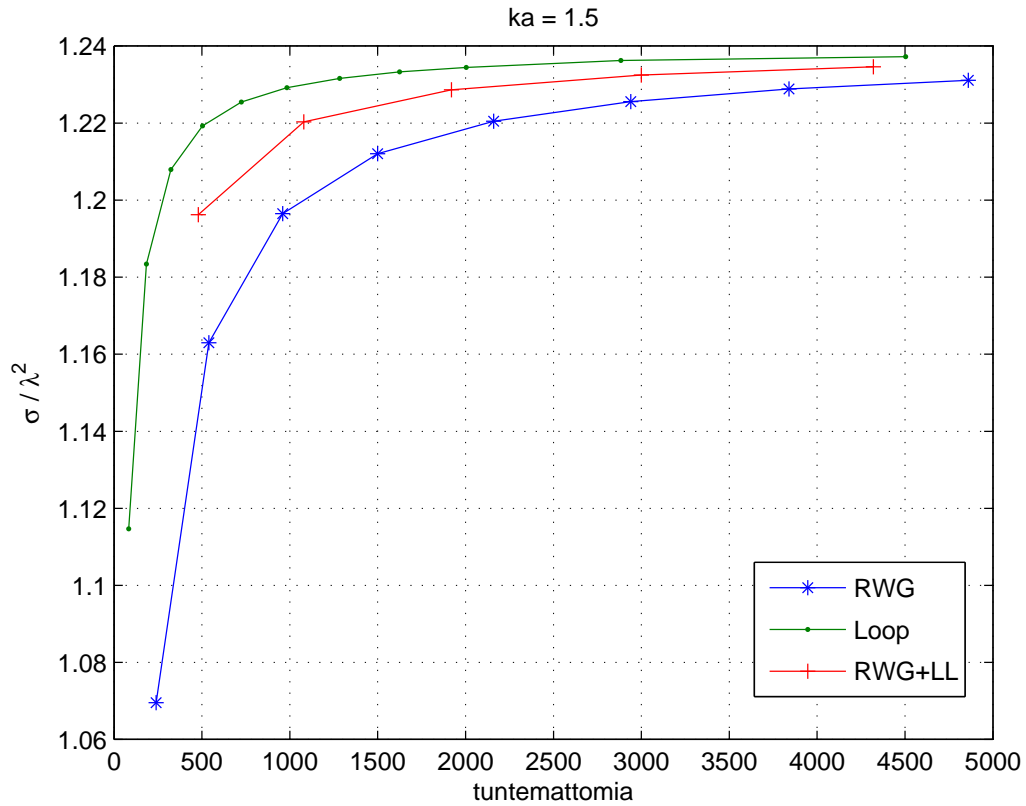
Sisäresonanssit aiheuttavat ongelmia käytettäessä $N\text{-}EFIE_{DB}$ ja $N\text{-}MFIE_{DB}$ yhtälöitä, kuten huomataan kuvasta 31. Ensimmäinen sisäresonassi syntyy pallon kokoparametrin ollessa 4,5. Tätä pienemmillä palloilla sisäresonansseja ei ole, mutta suuremmilla palloilla sisäresonansseja on paljon. Tästä syystä täytyy käyttää $CFIE$ yhtälöitä laskettaessa sirontaa suljetuista kappaleista korkeilla taajuuksilla.

6.1.5 Kantafunktioiden vaikutus ratkaisun tarkkuuteen

Geometrian diskretoinnin vaikutusta pintaintegraaliyhtälömenetelmän tarkkuuteen voidaan tarkastella laskemalla eteenpäinsironnut tutkapoikkipinta tuntemattomien määrän funktiona. Myös kantafunktioiden valinta vaikuttaa tarkkuuteen, joten kuvassa 32 on esitetty DB-pallon eteenpäinsironnut tutkapoikkipinta tuntemattomien määrän funktiona eri kantafunktioilla laskettuna. Integraaliyhtälöinä on käytetty $N\text{-}EFIE_{DB}$ ja $N\text{-}MFIE_{DB}$ yhtälöitä.

Silmukkakantafunktioilla laskettu tutkapoikkipinta suppenee huomattavasti nopeammin kohti oikeaa arvoa kuin RWG-kantafunktioilla laskettu. Jos laskennassa on käytetty sekä lineaarisia että RWG-kantafunktioita (RWG+LL), ratkaisu suppenee paremmin kuin pelkillä RWG-kantafunktioilla mutta huonommin kuin silmukkakantafunktioilla. Tietysti täytyy muistaa, että silmukkakantafunktioiden tapauksessa geometrian diskretoinnissa on käytetty enemmän elementtejä kuin RWG-kantafunktioilla samalla määrällä tuntemattomia. Silmukkakantafunktiot liittyvät elementtiverkon solmupisteisiin, ja lineaariset ja RWG-kantafunktiot liittyvät kolmioiden särmille. Taulukossa 1 on esitetty geometrian diskretoinnin vaikutus tuntemattomien määrään eri kantafunktioilla. Huomataan, että käytettäessä RWG+LL-kantafunktioita, tarvitaan noin 5 kertaa enemmän tuntemattomia silmukkakantafunktioihin verrattuna. Tämän vuoksi geometrian diskretoinnista aiheutunut virhe RWG- ja LL-kantafunktioilla on suurempi kuin silmukkakantafunktioilla samalla määrällä tuntemattomia.

Tutkitaan seuraavaksi miten eri integraaliyhtälöt vaikuttavat ratkaisun suppenemiseen. Kuvassa 33 on esitetty eteenpäinsironnut tutkapoikkipinta tuntemattomien funktiona laskettuna T-yhtälöillä, N-yhtälöillä ja yhdistetyillä kenttäintegraaliyhtälöillä. Kantafunktioina on käytetty silmukkakantafunktioita. Kuvasta huomataan, että hyvin pienen DB-pallon tapauksessa T-yhtälöt antavat melko huonon ratkaisun verrattuna N-yhtälöihin ja $CFIE_{DB}$ yhtälöihin. Kvasistatiikan avulla eteenpäin-



Kuva 32: Eteenpäinsironnut tutkapoikkipinta tuntemattomien funktiona eri kanta-funktioilla laskettuna DB-pallolle. Integraaliyhtälöinä on käytetty $N\text{-}EFIE_{DB}$ ja $N\text{-}MFIE_{DB}$ yhtälöitä.

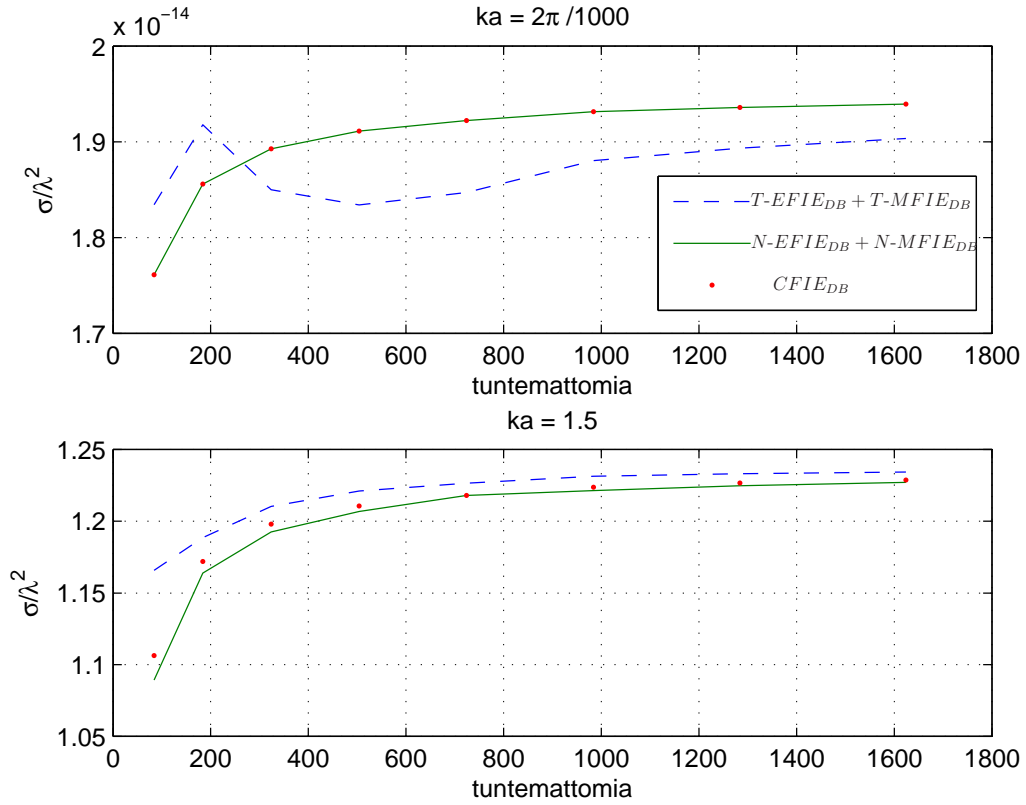
Taulukko 1: Tuntemattomien määrä riippuu sekä kolmioelementtien määrästä että käytettävistä kanta-funktioista. Taulukosta nähdään tuntemattomien määrä suhteessa kolmioelementtien määrään eri kanta-funktioilla.

Elementtien määrä	Loop	RWG	RWG + LL
80	82	240	480
180	182	540	1080
320	322	960	1920
500	502	1500	3000
720	722	2160	4320

sironneeksi tutkapoikkipinnaksi saadaan noin $1,96 \times 10^{-14}$, joten N-yhtälöiden ja $CFIE_{DB}$ yhtälöiden antama ratkaisu näyttäisi suppenevan kohti oikeata arvoa.

Isomman pallon tapauksessa T-yhtälöt toimivat huomattavasti paremmin kuin pienen pallon tapauksessa, kuten nähdään kuvan 33 alaosassa. Tarkka ratkaisu DB-

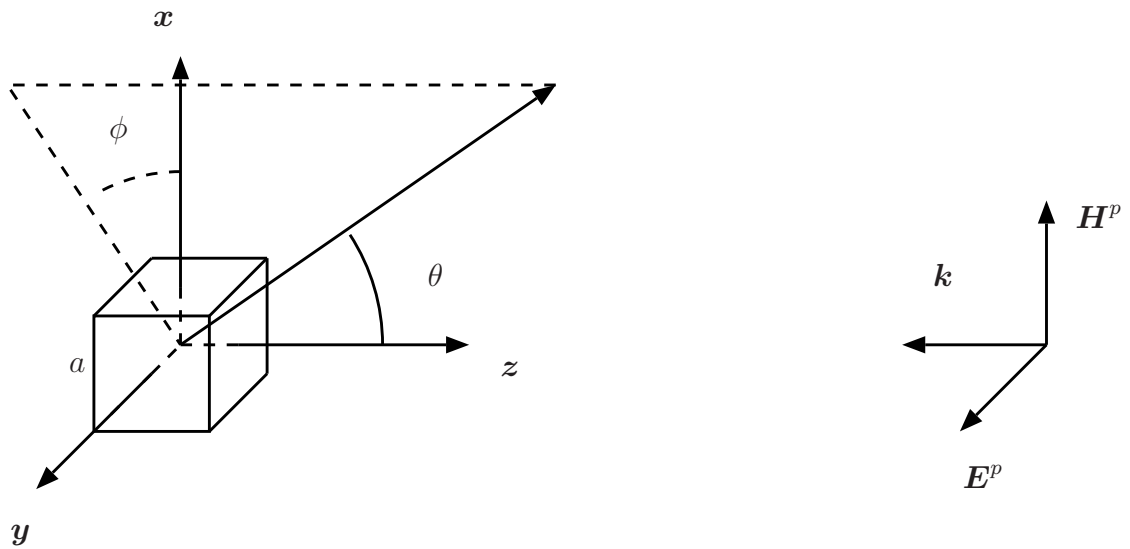
pallolle, jonka kokoparametria on 1,5, saadaan Mie-sarjalla ja se on noin 1,235, joten T-yhtälöt antavat melko tarkan ratkaisun pienellä määrällä tuntemattomia. Kannattaa myös huomata, että N-yhtälöt antavat hieman eri ratkaisun kuin $CFIE_{DB}$ yhtälöt, toisin kuin pienen pallon tapauksessa, missä niiden ratkaisut on lähes identtiset.



Kuva 33: Eteenpäinsironnut DB-pallon tutkapoikkipinta tuntemattomien funktiona eri yhtälöillä laskettuna, kun pallon kokoparametri $ka = \frac{2\pi}{1000}$ ja $ka = 1,5$. Laskennassa on käytetty silmukkakantafunktioita.

6.2 Sironta kuutiosta

Sähkömagneettisen säteilyn siroonnan laskeminen kuutiosta on hieman monimutkaisempi tehtävä kuin siroonnan laskeminen pallosta, koska kuutio ei ole täysin symmetrinen kappale. Näin ollen sirontapoikkipinta on riippuvainen sekä kuution asennosta että havaitsijan suunnasta. Lisäksi kuutio sisältää teräviä särmiä, jotka aiheuttavat singulaarisia kenttiä ja nämä puolestaan voivat aiheuttaa ongelmia numeerisessa laskennassa. On myös hyvä huomata, että kuution siroonnalle ei ole löydetty analyyttistä ratkaisua, joten numeerisesti laskettujen tulosten tarkkuuden arviointi on huomattavasti vaikeampaa kuin pallon tapauksessa. Ratkaisun tarkkuutta voidaan arvioida lisäämällä elementtien määrää ja katsomalla mitä arvoa kohti ratkaisu suppenee.



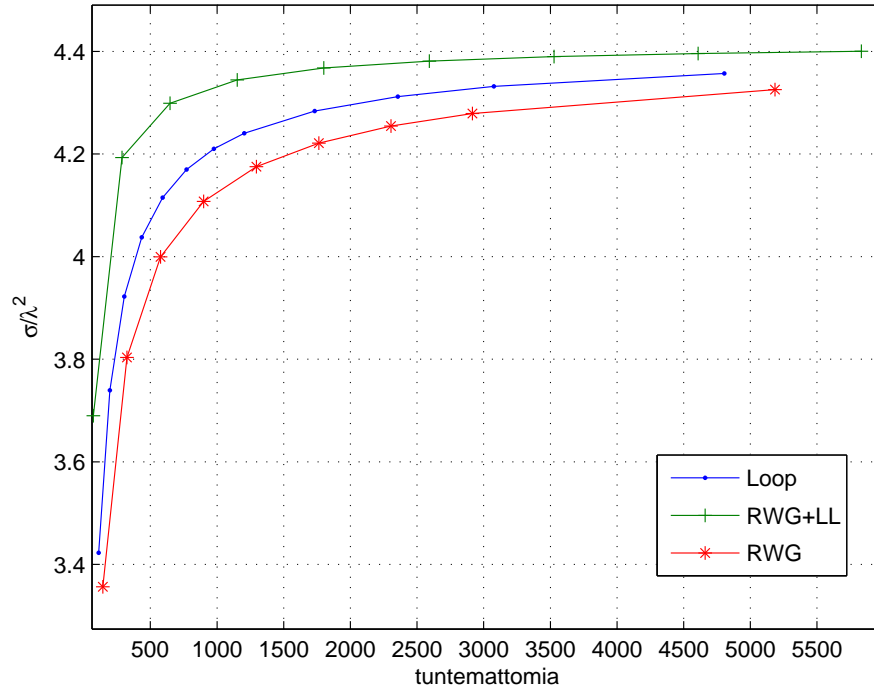
Kuva 34: Ongelman geometria: Kuution keskipiste on origossa ja sen sivun pituus on a . Herättävänä kenttänä toimii lineaarisesti polarisoitunut tasoaalto, joka etenee $-z$ -akselin suuntaan.

Kuvassa 34 on esitetty geometria, jota on käytetty siroonnan laskemisessa. Tasoaalto etenee $-z$ -akselin suuntaan siten, että sähkökenttä on y -akselin suuntainen ja magneettikenttä on x -akselin suuntainen. Herättävä kenttä on siis lineaarisesti polarisoitunut. Kuution keskipiste on origossa ja sen sivut ovat koordinaattiakselien suuntaisesti. Näin ollen kuution valaistu sivu on kohtisuorassa tulevaa aaltoa vastaan. Eteenpäinsironnut tutkapoikkipinta voidaan määrittellä kuvan 34 tilanteessa missä kulma $\theta = 180$ astetta ja takaisinsironnassa kulma $\theta = 0$ astetta. E-tasossa kulma $\phi = 90$ astetta ja H-tasossa kulma $\phi = 0$ astetta.

6.2.1 Kantafunktioiden vaikutus ratkaisun tarkkuuteen

Tutkitaan ensiksi, kuinka hyvin laskettu sirontapoikkipinta suppenee, kun tuntemattomien määrää lisätään. Kuvassa 35 on esitetty eteenpäinsironnut tutkapoikkipinta

DB-kuutiolle, jonka kokoparametri $ka = \pi$. Tässä k on aaltoluku ja a on kuution sivun pituus. Näin ollen kuution sivun pituus on puoli aallonpituutta. Laskenta on tehty käyttäen $N\text{-}EFIE_{DB}$ ja $N\text{-}MFIE_{DB}$ yhtälöitä.

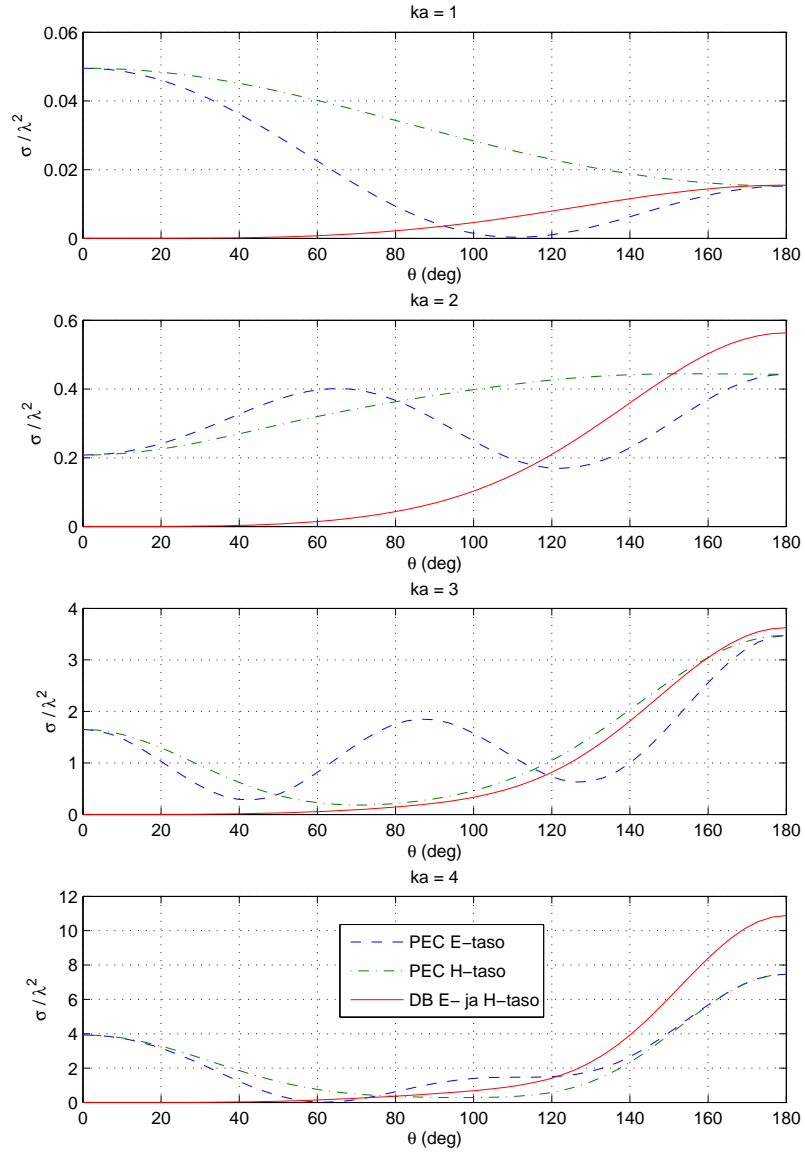


Kuva 35: DB-kuution ($ka = \pi$) eteenpäinsironnut tutkapoikkipinta tuntematomien funktiona eri kantafunktioilla laskettuna.

RWG- ja silmukkakantafunktioilla laskettu tutkapoikkipinta suppenee erittäin huonosti kohti oikeata ratkaisua. Tämä johtuu ilmeisesti kuution terävistä särmistä, koska RWG- ja silmukkakantafunktiot eivät pysty kuvaamaan riittävän hyvin kuution särmien lähellä olevia pintavirtatiheyksiä. Ratkaisu saadaan nopeammin suppenemaan nostamalla kantafunktioiden astetta eli käyttämällä lineaarisia kantafunktioita RWG-kantafunktioiden kanssa.

6.2.2 Sironta erikokoisista kuutioista

Sähkömagneettinen sironta DB-kuutiosta, jonka valaistu sivu on kohtisuorassa tulevaa aaltoa vastaan, on hyvin samankaltainen kuin sironta DB-pallosta, kuten nähdään kuvasta 36. Takaisinsironta on edelleen nolla taajuudesta riippumatta, ja eteenpäinsironta kasvaa kuution koon kasvaessa. Lisäksi sirontakuvion pääkeila kapenee. Kannattaa myös huomata, että DB-kuution sirontakuvio on samanlainen sekä E-tasossa että H-tasossa. Tämä johtuu siitä, että tässä tapauksessa kuutio on symmetrinen herättävän kentän suhteen ja DB-reunaehto symmetrinen. PEC-kuution tapauksessa E- ja H-tason sirontakuviot eroavat huomattavasti toisistaan. Lisäksi

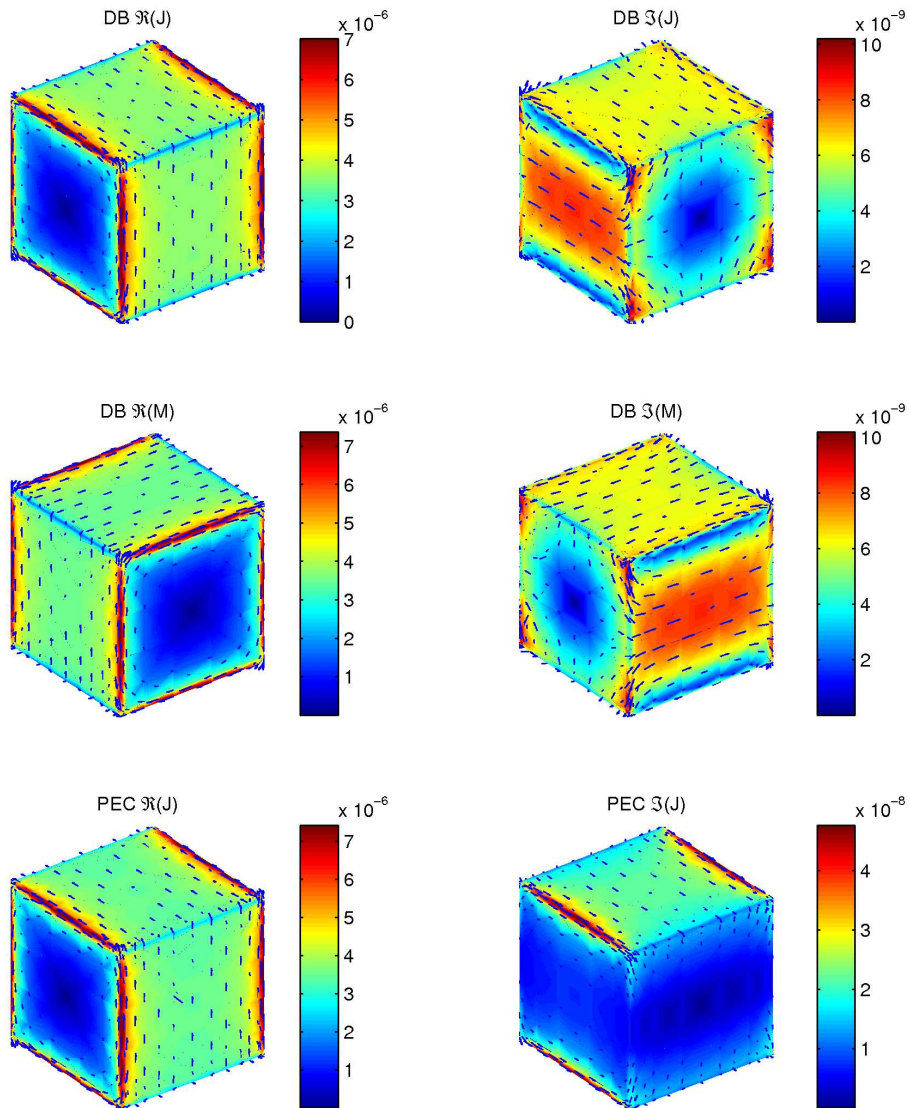


Kuva 36: Erikokoisten DB- ja PEC-kuutioiden bistaattinen tutkapoikkipinta. Takaisinsironnassa $\theta = 0$ ja eteenpäinsironnassa $\theta = 180$ astetta.

PEC-kuutio on erittäin voimakas takaisinsirottaja varsinkin matalilla taajuuksilla, missä takaisinsironta on voimakkaampaa kuin eteenpäinsironta.

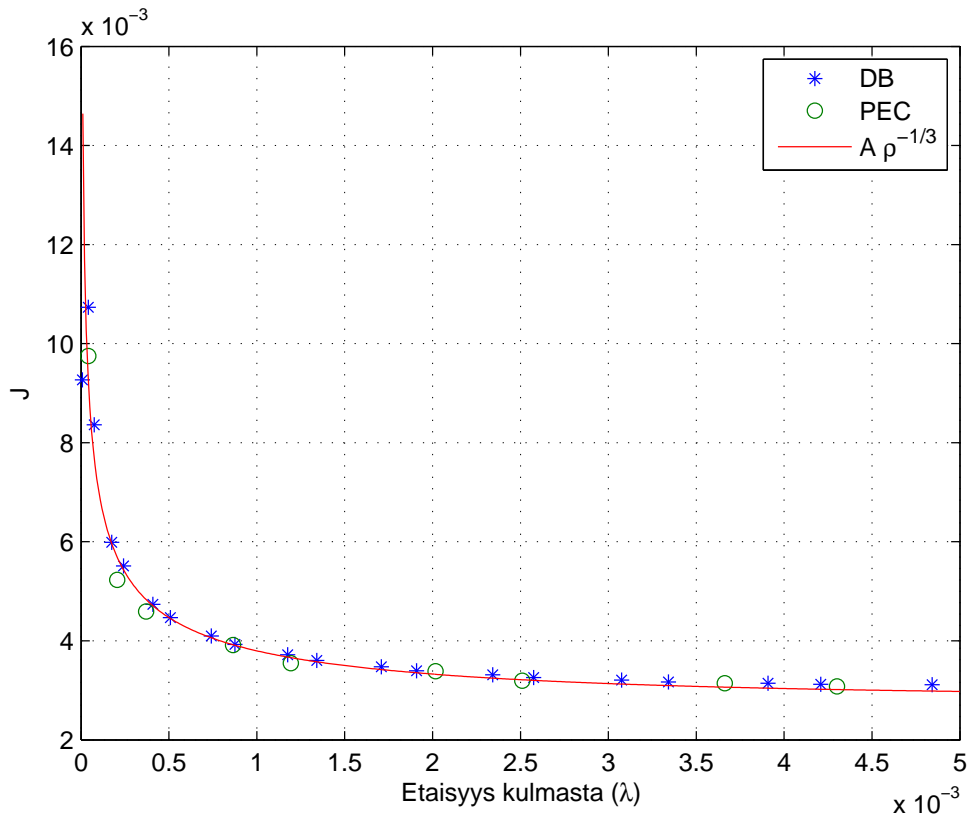
6.2.3 Ekvivalentit pintavirtatiheydet kuution pinnalla

Sähköisten ja magneettisten pintavirtatiheyksien käyttäytyminen kuution tapauksessa on melko samankaltaista kuin pallon tapauksessa, kuten nähdään kuvasta 37. Kuution ollessa pieni suhteessa aallonpituuteen pintavirtatiheyden reaali-osa koostuu yhdestä virtasilmuksista ja imaginääriosaa koostuu neljästä virtasilmuksista. Taajuuden kasvaessa syntyy uusia virtasilmuksia aivan kuten pallon tapauksessa.



Kuva 37: Normalisoidut ekvivalentit pintavirtatiheydet aallonpituuteen nähden pienen kuution pinnalla ($ka = \frac{2\pi}{1000}$).

Suurimpana erona havaitaan pintavirtatiheyksien voimakas kasvu mentäessä kohti kuution särmää, missä virrat ovat särmän suuntaisia. Kuvassa 38 on esitetty normalisoidun sähköisen pintavirtatiheyden käyttäytyminen lähellä DB- ja PEC-kuutioiden terävää särmää. Voimakkain singulaarisuus 90 asteen kiilassa on verrannollinen termiin $\rho^{-1/3}$ sekä DB- että PEC-kiilalle, kuten osoitettiin luvussa 2.4. Tämä voidaan laskea analyttisesti Laplacen yhtälöstä, koska mentäessä riittävän lähelle kiilan terävää kärkeä tilanne näyttää staattiselta. Pintaintegraaliyhtälömenetelmällä lasketut ekvivalentit pintavirtatiheydet terävän kiilan lähellä käyttäytyvät statiikan ennustamalla tavalla.



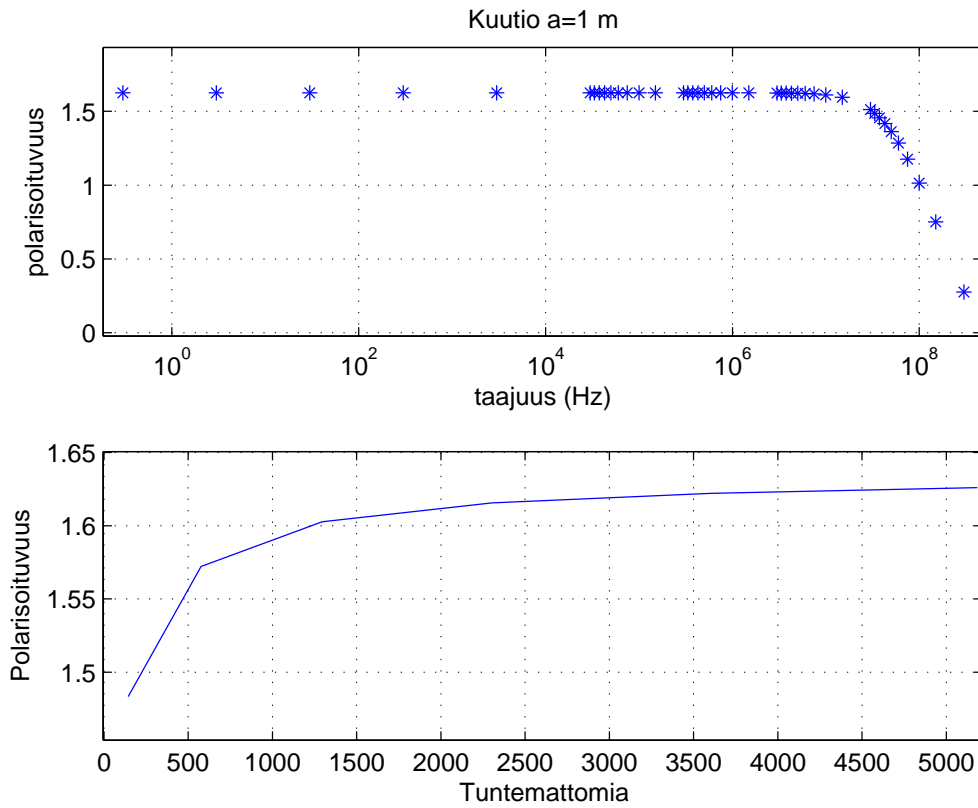
Kuva 38: Ekvivalentin sähköisen pintavirtatiheyden käyttäytyminen lähellä kuution terävää kulmaa laskettuna DB- ja PEC-kuutiolle pintaintegraaliyhtälömenetelmällä ja analyttinen ratkaisu Laplacen yhtälöstä.

6.2.4 DB-kuution polarisoituvuus

DB-kuutiolle voidaan laskea staattinen polarisoituvuus sirontapoikkipinnan avulla, jos kuution koko on riittävän pieni suhteessa aallonpituuteen. Kuvan 39 yläosassa on esitetty DB-kuution polarisoituvuus taajuuden funktiona, joka on laskettu eteenpäinsironneen tutkapoikkipoikkipinnan avulla $N\text{-}EFIE_{DB}$ ja $N\text{-}MFIE_{DB}$ yhtälöillä kuutiolle, jonka sivun pituus on 1 m. Kantafunktiona on käytetty RWG+LL-

kantafunktioita. Kuvan 39 alaosassa nähdään ratkaisun suppeneminen, kun tuntemattomien määrää kasvatetaan.

Selvästi nähdään, että staattinen polarisoituvuus DB-kuutiolle pystytään määrittämään erittäin laajalta taajuuskaistalta samoin kuin pallon tapauksessa. Polarisoituvuus voidaan määrittää aallonpituuden ollessa noin 100 kertaa pidempi kuin kuution sivun pituus. Myöskään DB-kuution tapauksessa ei ilmene matalan taajuuden ongelmia, ja ratkaisu pysyy stabiilina lähes nollataajuudelle asti. Ratkaisun suppeneminen lisättäessä tuntemattomien määrää on puolestaan hieman hitaampaa kuin pallon tapauksessa.



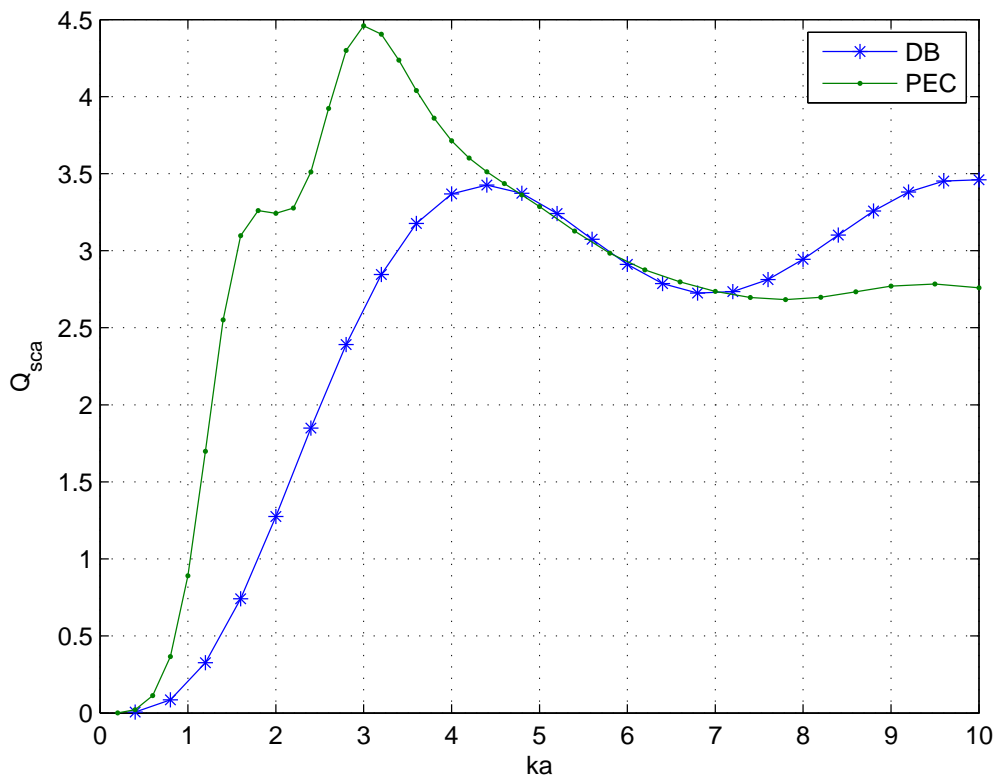
Kuva 39: DB-kuution polarisoituvuus laskettuna sirontapoikkipinnan avulla ja polarisoituvuuden suppeneminen lisättäessä tuntemattomia.

6.2.5 Kuution sirontatehokkuus

Tarkastellaan seuraavaksi DB- ja PEC-kuutioiden sirontatehokkuuksia. Sirontatehokkuus DB-kuutiolle on laskettu käyttäen $CFIE_{DB}$ yhtälöitä ja RWG+LL-kantafunktioita. PEC-kuutiolle sirontatehokkuus on laskettu $J-CFIE_{PEC}$ yhtälöillä ja RWG-kantafunktioilla. $CFIE$ yhtälöitä on käytetty, koska sisäresonanssiongelma halutaan välttää. Kuvassa 40 nähdään PEC- ja DB-kuutioille laskettu sirontatehokkuus kuution kokoparametrin funktiona. Sirontatehokkuus kuutioille on laskettu

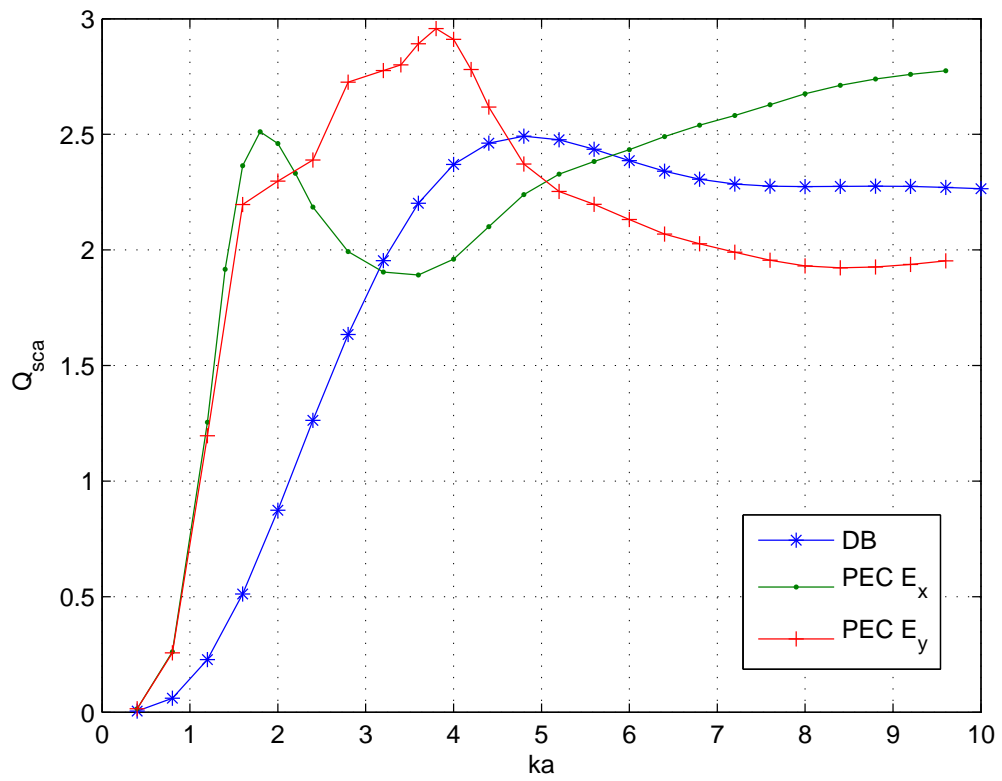
herättävän sähkökentän ollessa lineaarisesti polarisoitunut y -akselin suuntaisesti ja tuleva tasoaalto on kohtisuorassa kuution sivua vastaan. Jos herättävän sähkökentän polarisaatiota käännetään x -akselin suuntaiseksi, DB- ja PEC-kuutioiden sirontatehokkuus ei muutu, koska tilanne on symmetrinen.

Samoin kuin pallon tapauksessa, PEC-kuutio on DB-kuutioon verrattuna voimakkaampi sirottaja matalilla taajuuksilla ja heikompi korkeilla taajuuksilla. On mielenkiintoista huomata, että DB- ja PEC-kuutioiden sirontatehokkuuden maksimia ei saavuteta ensimmäisen paikallisen maksimin kohdalla, jos kuution sivu on kohtisuorassa tulevaa aaltoa vastaan. Tällöin sirontatehokkuuden maksimi saavutetaan vasta toisen paikallisen maksimin kohdalla. DB-kuution tapauksessa ensimmäinen ja toinen paikallinen maksimi on lähes yhtä korkeita, mutta PEC-kuution tapauksessa ero on huomattavasti suurempi. Viitteessä [28] on laskettu PEC-kuution sirontatehokkuus ja tulos on yhtenevä tässä työssä lasketun sirontatehokkuuden kanssa.



Kuva 40: DB- ja PEC-kuutioille laskettu sirontatehokkuus kuution kokoparametrin funktiona kulman α ollessa 0 astetta.

Sirontatehokkuus muuttuu, jos kuutiota kierretään jonkun akselin ympäri. Kuvassa 41 on esitetty sirontatehokkuus DB- ja PEC-kuutioille, joita on kierretty 45 astetta y -akselin ympäri kuvan 42 tapaan. Lisäksi herättävä sähkökenttä on y - tai x -akselin suuntainen. DB- ja PEC-pallojen tapauksessa sirontatehokkuuden maksimi saavutettiin ensimmäisen huipun kohdalla, kuten käy myös DB-kuutiolle, jota



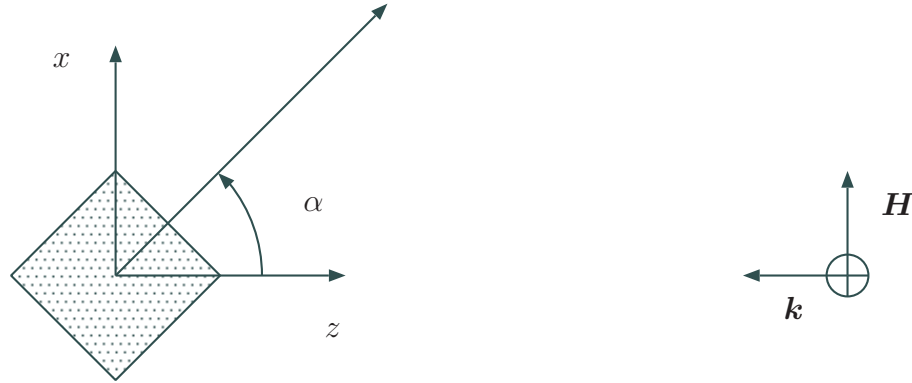
Kuva 41: DB- ja PEC-kuutioille laskettu sirontatehokkuus kuution kokoparametrin funktiona kulman α ollessa 45 astetta. Herättävän kentän polarisaatio ei vaikuta DB-kuution sirontatehokkuuteen, mutta PEC-kuution sirontatehokkuuteen sillä on suuri vaikutus.

on kierretty 45 astetta. Lisäksi kuutiota kiertämällä sirontatehokkuuden maksimiarvo pienenee. Täytyy kuitenkin huomata, että geometrinen poikkipinta on suurempi verrattuna kiertämättömään kuutioon, ja sirontatehokkuus saatiin kokonaissirontapoikkipinnasta jakamalla se geometrisella poikkipinnalla.

Nyt herättävän kentän polarisaatio vaikuttaa voimakkaasti PEC-kuution sirontatehokkuuteen. DB-kuutioon tällä ei kuitenkaan ole vaikutusta. 45 astetta kierretty PEC-kuutio on matalilla taajuuksilla voimakkaampi sirottaja DB-kuutioon verrattuna riippumatta herättävän kentän polarisaatiosta. Korkeammilla taajuuksilla kentän polarisaatiolla on suuri vaikutus PEC-kuution sirontatehokkuuteen.

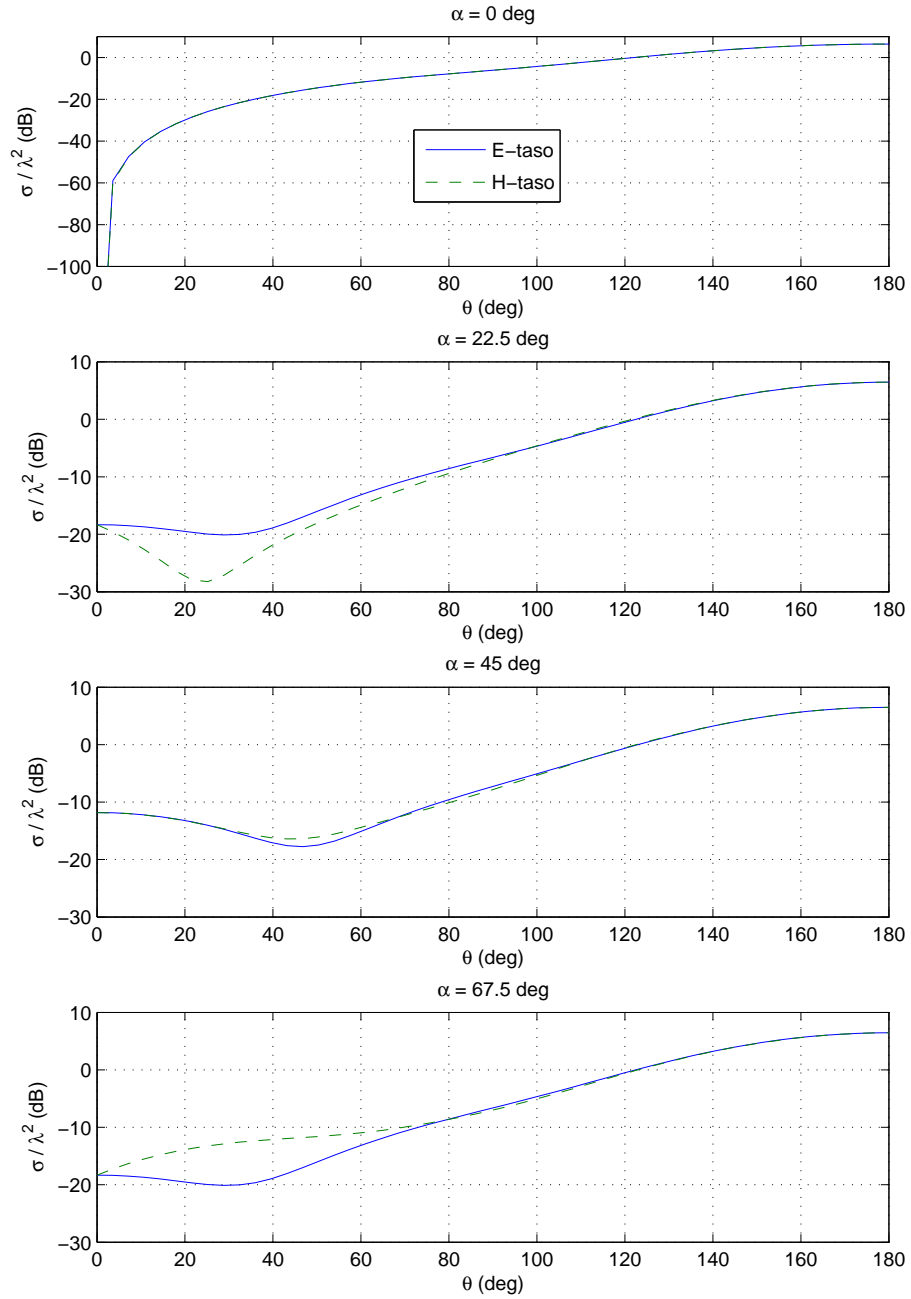
6.2.6 Kuution asennon vaikutus sirontapoikkipintaan

Kuutio ei ole täysin symmetrinen kappale, joten tutkapoikkipinta on riippuvainen kuution asennosta. Määritellään kulma α , joka kuvaa kuution kiertymistä y -akselin ympäri kuvan 42 mukaisesti. Kuution valaistu sivu on kohtisuorassa tulevaa aaltoa vastaan, kun kulma $\alpha = 0$. Koordinaatiston y -akseli osoittaa ulospäin paperista ja herättävä sähkökenttä on y -akselin suuntainen.

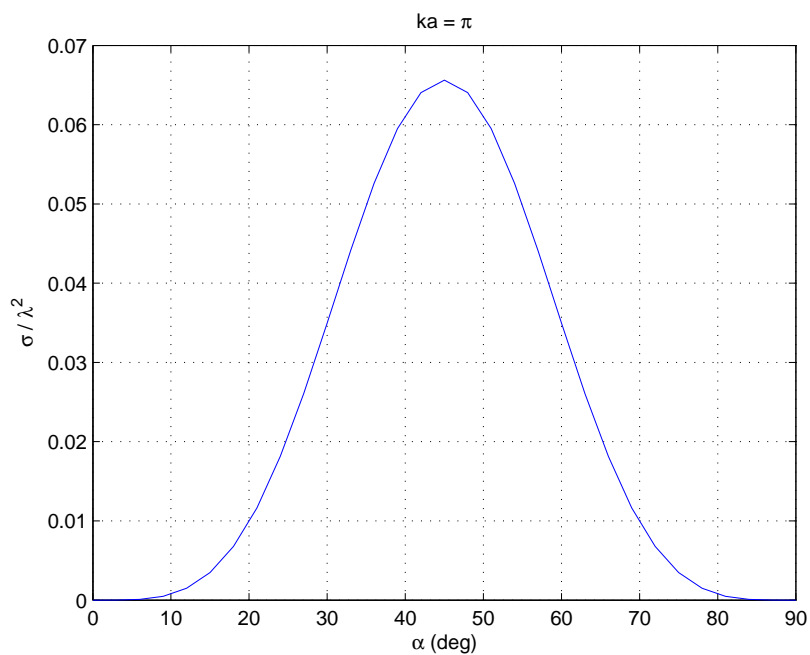


Kuva 42: Kuution asento määritellään kulman α avulla. Kulma α on kuution sivun normaalin ja z -akselin välinen kulma xz -tasossa. Lineaarisesti polarisoitunut tasoaalto etenee $-z$ -akselin suuntaan.

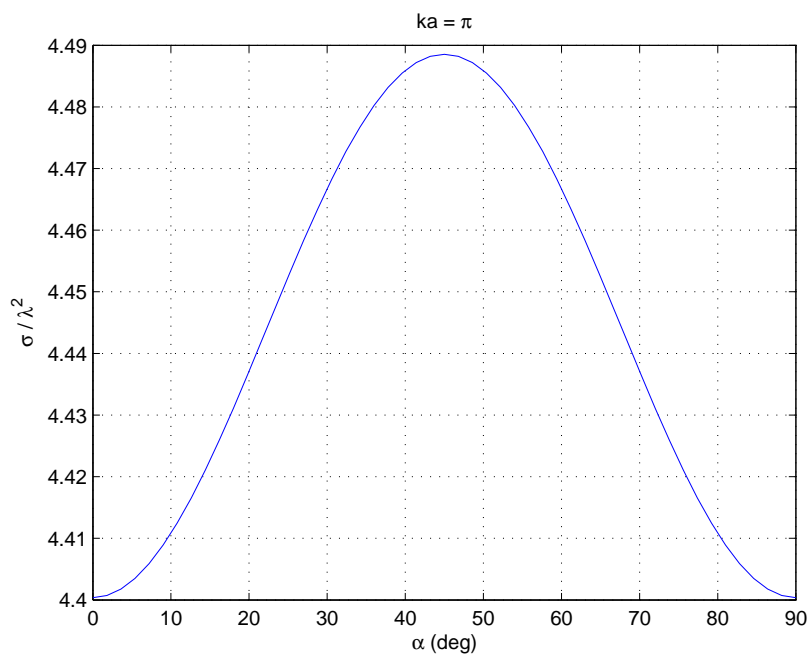
Sirontapoikkipinta kierretylle kuutiolle on laskettu $N\text{-}EFIE_{DB}$ ja $N\text{-}MFIE_{DB}$ yhtälöillä, ja kantafunktioina on käytetty RWG+LL-kantafunktioita. Kulman α ollessa erisuuri kuin nolla DB-kuution sirontapoikkipinta on erilainen E- ja H-tasoissa, kuten huomataan kuvasta 43. Takaisinsironta myös kasvaa ja se saa maksimiarvonsa, kun $\alpha = 45$ astetta. Takaisinsironta kulman α funktiona on esitetty kuvassa 44 ja eteenpäinsironta kuvassa 45. Kannattaa huomata, että sirontakuvio E-tasossa on symmetrinen kulman $\alpha = 45$ suhteen, mutta H-tasossa se ei ole. Vaihtamalla sähkökentän polarisaatio x -akselin suuntaiseksi, sirontakuvio pysyy samana mutta E- ja H-tasot vaihtavat paikkaa.



Kuva 43: DB-kuution ($ka = \pi$) bistaattinen tutkapoikkipinta tilanteessa, missä kuu-
tion ja tulevan aallon välinen kulma on α .



Kuva 44: DB-kuutiosta takaisinsironnut tutkapoikkipinta, kun kuutiota pyöritetään y-akselin ympäri.



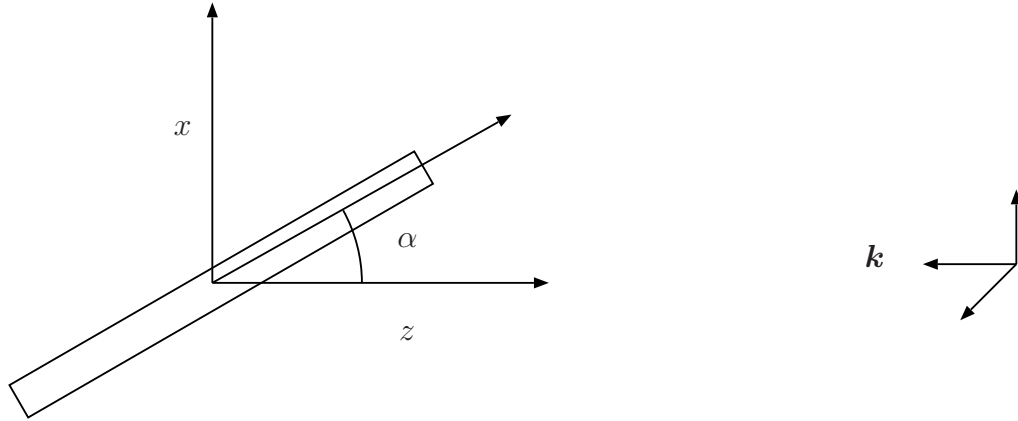
Kuva 45: DB-kuutiosta eteenpäinsironnut tutkapoikkipinta, kun kuutiota pyöritetään y-akselin ympäri.

6.3 Sironta epäsymmetrisistä kappaleista

DB-kuution tapauksessa huomattiin, että takaisinsironta poikkeaa nolasta, jos kuutio ei ollut symmetrisesti herättävään kenttään nähden. Tässä kappaleessa tutkitaan sirontaa kappaleista, jotka ovat epäsymmetrisiä. Kappaleiksi on valittu puolipallo ja laatikko, jonka yksi sivu on pitkä verrattuna muihin sivuihin.

6.3.1 Sironta laatikosta

Tutkitaan ensiksi tapausta, missä siroittajana toimii laatikko, jonka dimensiot ovat $\lambda/2 \times \lambda/20 \times \lambda/20$. Määritellään laatikon asento herättävään kenttään nähden kulman α avulla kuvan 46 mukaan. Kulma α on laatikon pitkän sivun suuntaisen vektorin ja z -akselin välinen kulma xz -tasossa.



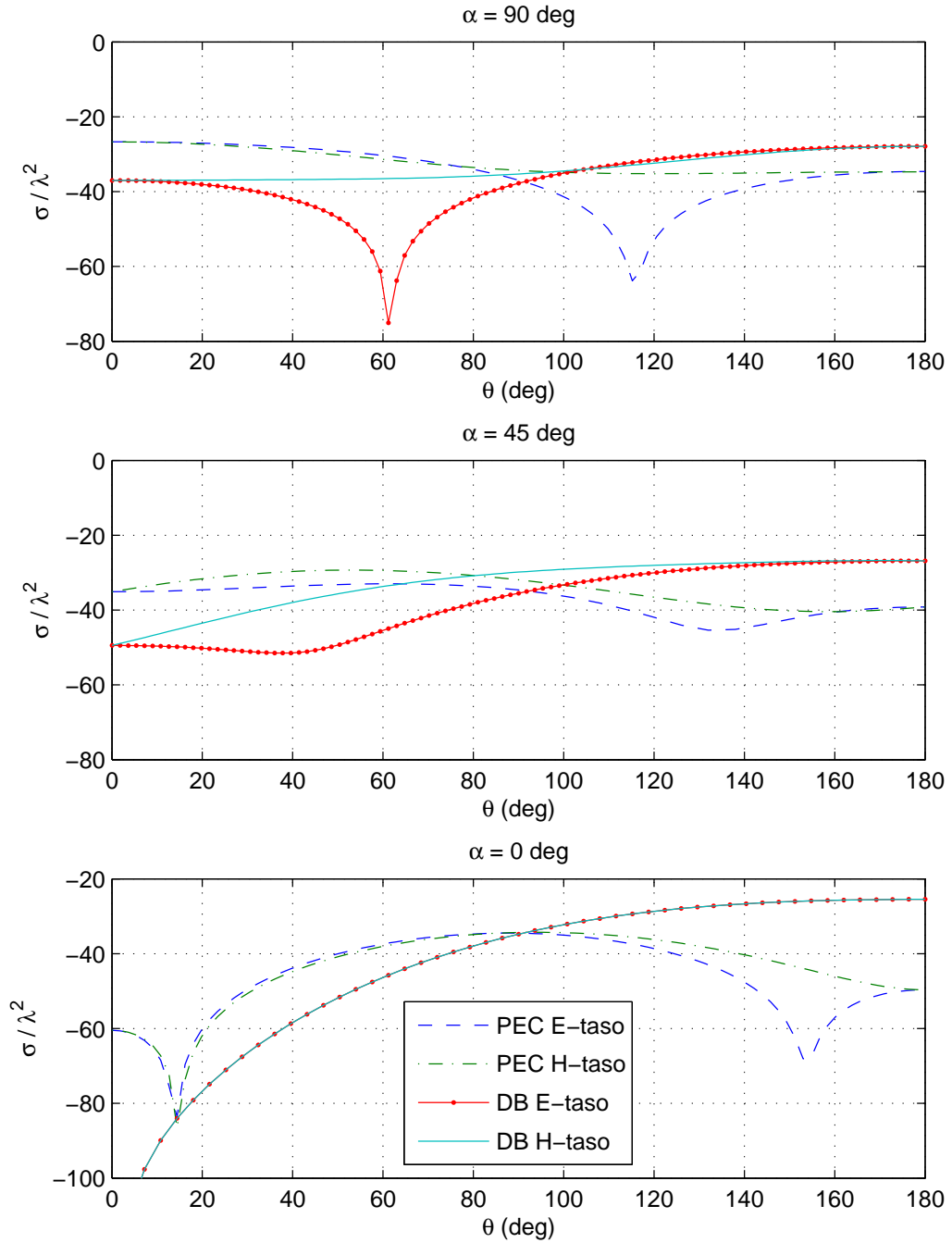
Kuva 46: Laatikon asento määritellään kulman α avulla. Kulma α on laatikon pitkän sivun ja z -akselin välinen kulma xz -tasossa. Lineaarisesti polarisoitunut tasoaalto etenee $-z$ -akselin suuntaan.

Kuvassa 47 on esitetty DB- ja PEC-laatikoiden sirontapoikkipinnat laatikoiden ollessa eri asennoissa. Herättävänä kenttänä toimii $-z$ -akselin suuntaan etenevä tasoaalto, jonka sähkökenttä on lineaarisesti polarisoitunut y -akselin suuntaisesti. Tulokset DB-laatikolle on laskettu käyttäen $N\text{-}EFIE_{DB}$ ja $N\text{-}MFIE_{DB}$ yhtälöitä ja RWG+LL-kantafunktioita. PEC-laatikolle laskennassa on käytetty RWG-kantafunktioita ja $T\text{-}EFIE_{PEC}$ yhtälöä. Vastaavasti kuvassa 48 on esitetty sama tilanne, mutta herättävä sähkökenttä on polarisoitunut x -akselin suuntaisesti.

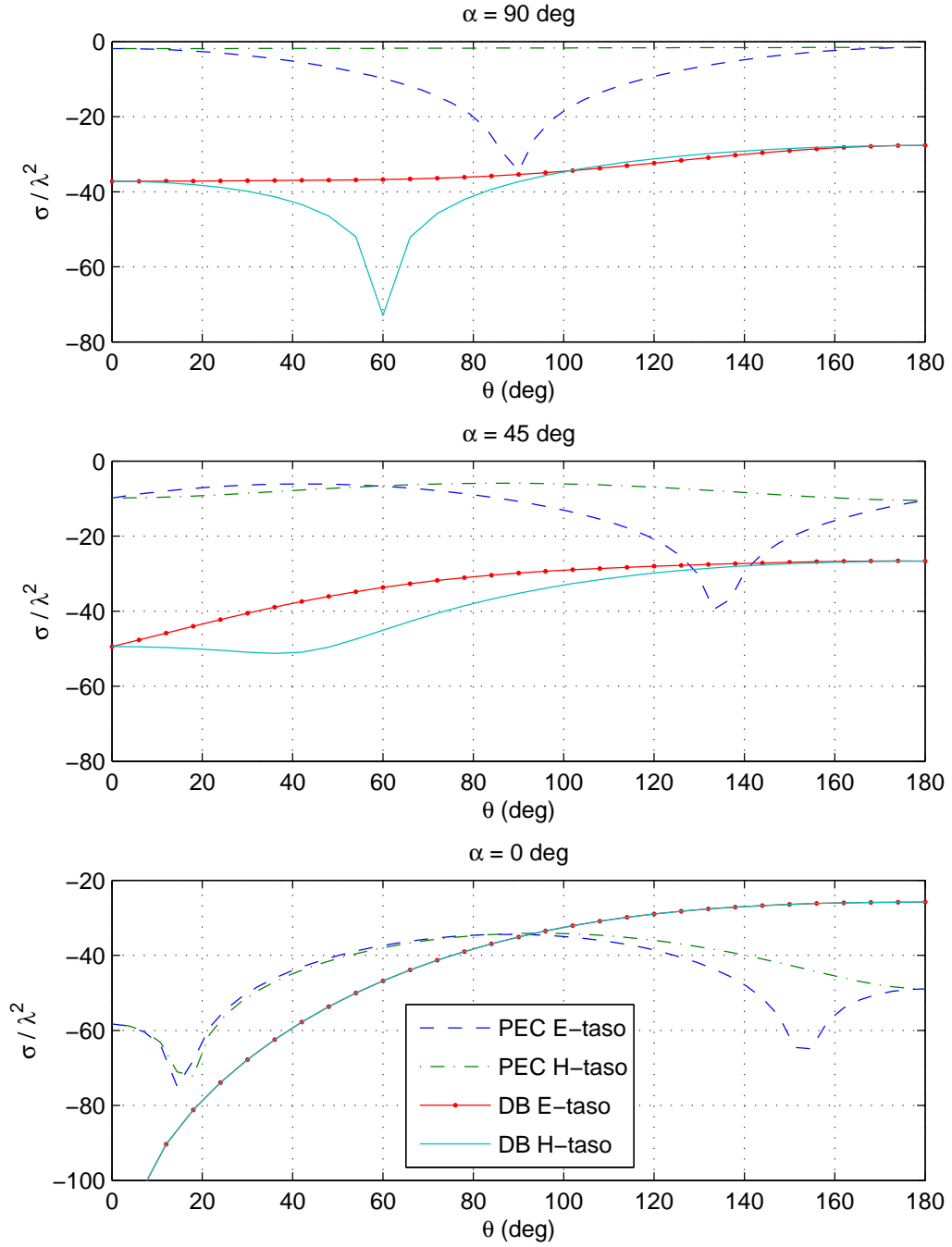
Jos kulma $\alpha = 0$, laatikko on symmetrisesti herättävään kenttään nähden, jolloin DB-kappaleen takaisinsironta on nolla ja sirontakuvio on samanlainen E- ja H-tasoissa. Lisäksi DB-laatikon eteenpäinsironta saa suurimman arvonsa tässä tapauksessa. Polarisaation kääntäminen 90 asteella ei myöskään vaikuta sirontapoikkipintaan.

Kulman α ollessa erisuuri kuin nolla laatikko ei ole enää symmetrinen kenttään nähden, ja DB-laatikon takaisinsironta poikkeaa nolasta. Lisäksi sirontapoikkipinta on erilainen E- ja H-tasoissa. Takaisinsironta on suurimmillaan, kun $\alpha = 90$ astetta,

jolloin laatikon pisin sivu on kohtisuorassa tulevaa aaltoa vastaan. Kannattaa myös huomata, että takaisinsironnan ja eteenpäinsironnan välinen ero on vain noin 10 dB. DB-reunaehdon symmetriasta johtuen, polarisaation vaihtaminen y -suuntaisesta x -suuntaiseksi, sirontapoikkipinnan E-taso ja H-taso vaihtavat paikkaa mutta muita muutoksia ei tapahdu. PEC-reunaehdon tapauksessa polarisaation vaihtaminen vaikuttaa erittäin voimakkaasti sirontapoikkipintaan. Sähkökentän ollessa laatikon pitkän sivun suuntainen sirontapoikkipinta kasvaa noin 20 dB.



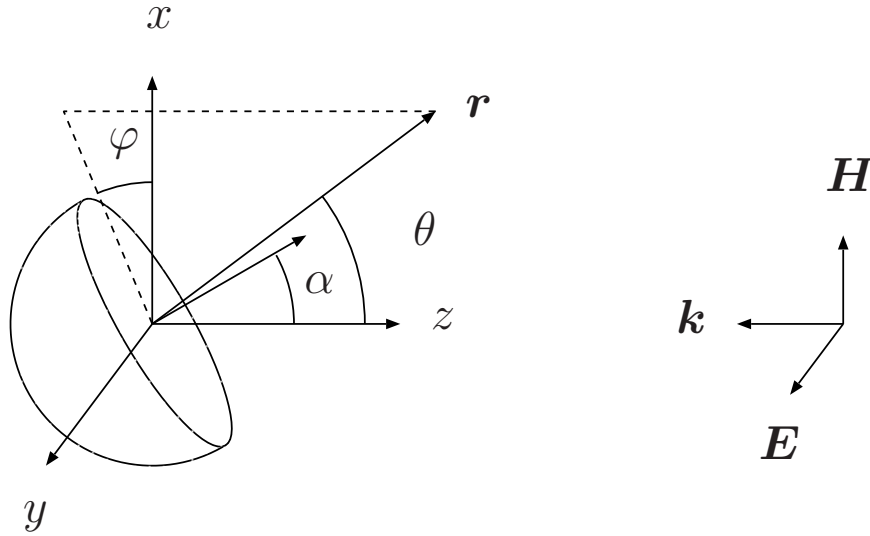
Kuva 47: $\frac{\lambda}{2} \times \frac{\lambda}{20} \times \frac{\lambda}{20}$ DB- ja PEC-laatikoiden sirontapoikkipinnat eri asennoissa. Tasa-aallon sähkökenttä on lineaarisesti polarisoitunut y -akselin suuntaisesti. Takaisinsironnassa $\theta = 0$ ja eteenpäinsironnassa $\theta = 180$ astetta.



Kuva 48: $\frac{\lambda}{2} \times \frac{\lambda}{20} \times \frac{\lambda}{20}$ DB- ja PEC-laatikoiden sirontapoikkipinnat eri asennoissa. Tasoaallon sähkökenttä on lineaarisesti polarisoitunut x -akselin suuntaisesti. Takaisinsironnassa $\theta = 0$ ja eteenpäinsironnassa $\theta = 180$ astetta.

6.3.2 Sironta puolipallosta

Tarkastellaan seuraavaksi sähkömagneettisen säteilyn sirontaa a -säteisestä puolipallosta. Kuvassa 49 on esitetty geometria sirontan laskemiseen puolipallosta. Origo sijaitsee puolipallon tasaisen sivun keskipisteessä. Kulma α määrittää puolipallon asennon, ja se on puolipallon tasaisen sivun normaalivektorin ja z -akselin välinen kulma xz -tasossa. Tasoaalto etenee $-z$ -akselin suuntaan, ja sähkökenttä on lineaarisesti polarisoitunut y -akselin suuntaisesti.

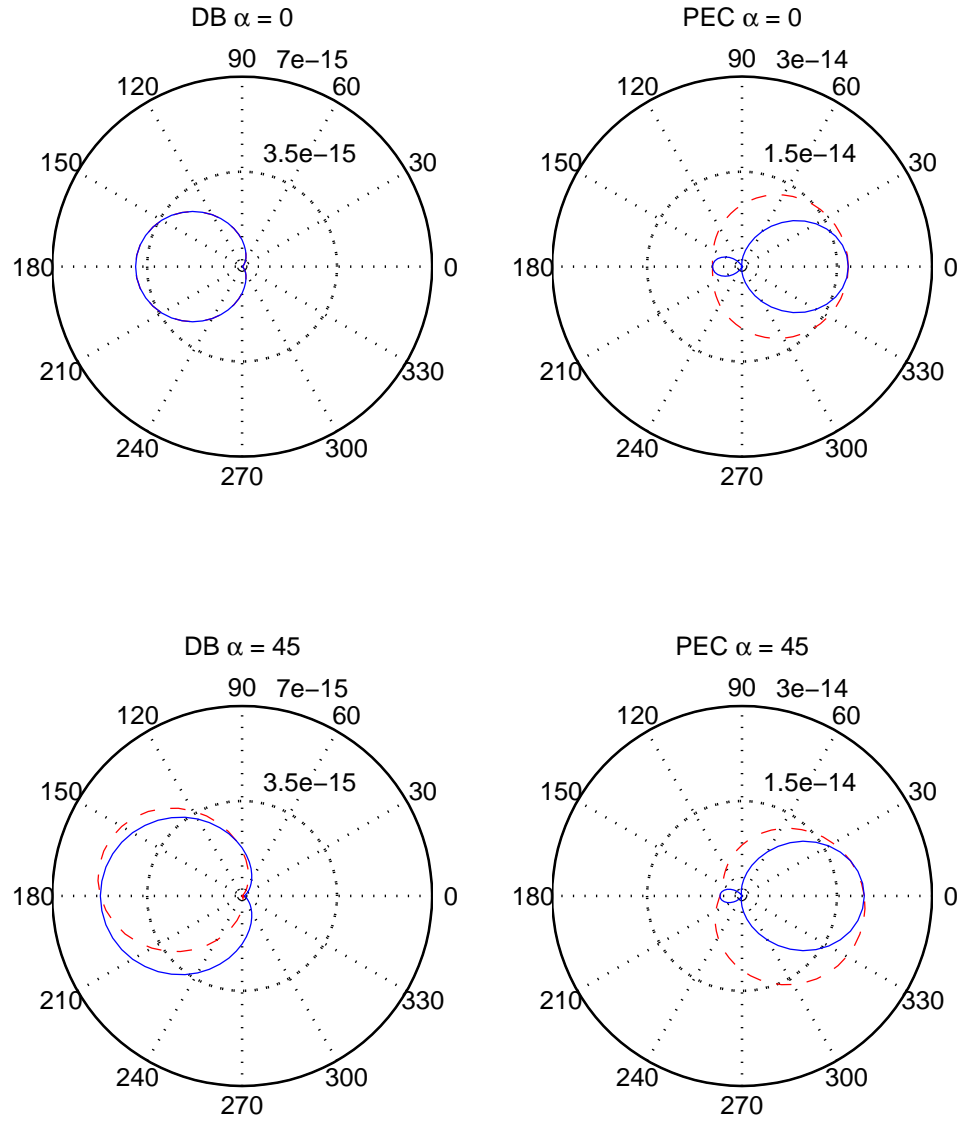


Kuva 49: Sirottajana toimii puolipallo, jonka asento suhteessa herättävään kenttään määritellään kulman α avulla. Kulma α on puolipallon tasainen pinnan normaalin ja z -akselin välinen kulma xz -tasossa. Tarkastelupisteen suunta määritellään kulmien θ ja φ avulla.

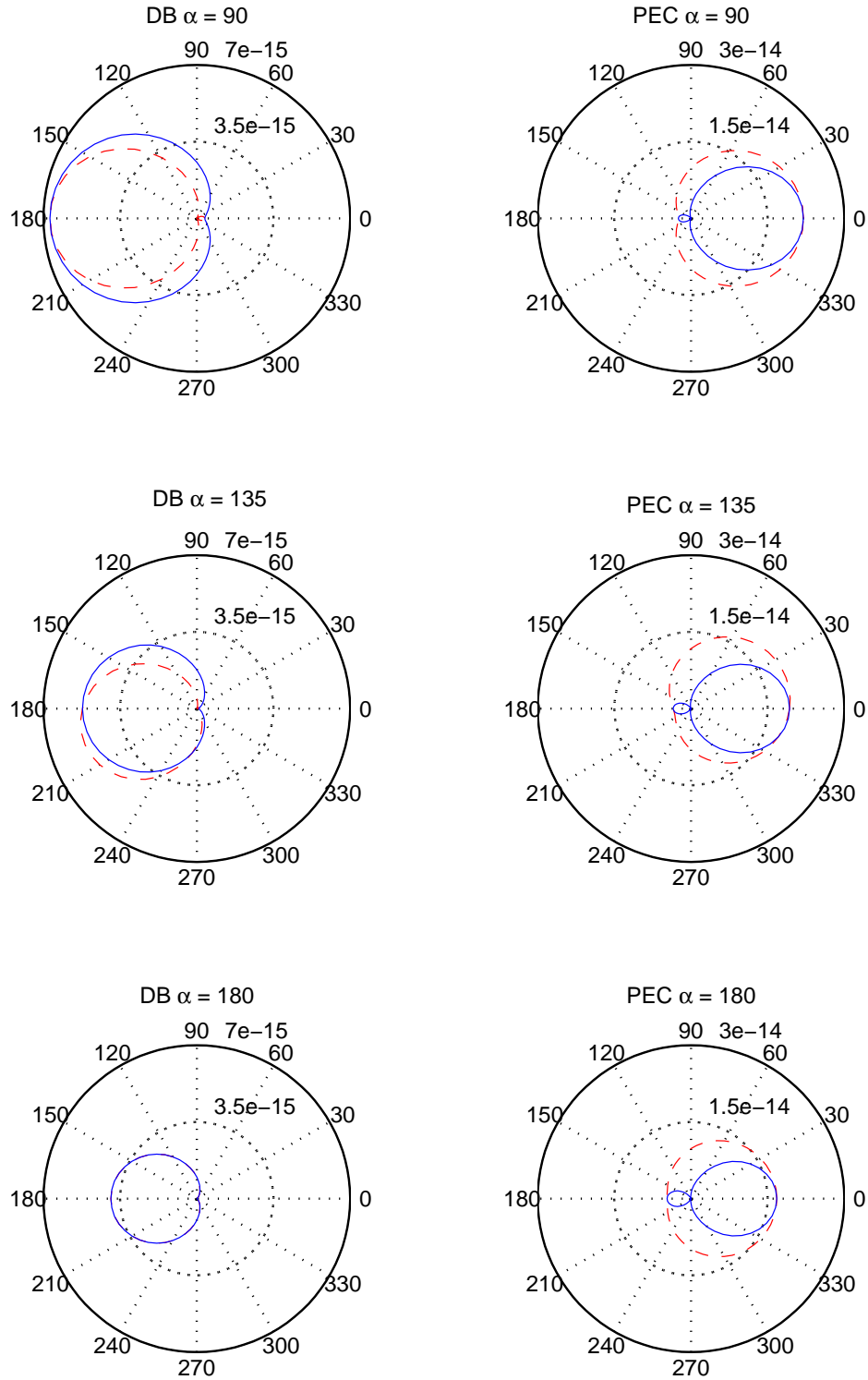
Tarkastellaan sirontapoikkipinnan riippuvuutta puolipallon asennosta suhteessa herättävään kenttään. Kuvissa 50 ja 51 on esitetty hyvin pienten DB- ja PEC-puolipallojen ($ka = \frac{2\pi}{1000}$) sirontapoikkipinnat E- ja H-tasoissa kulman α eri arvoilla. Sirontapoikkipinta on esitetty napakoordinaatistossa, joten napakoordinaatiston kulma vastaa kuvan 49 kulmaa θ .

Takaisinsironta pienestä DB-puolipallosta on nolla, jos kulma α on 0 tai 180 astetta, jolloin puolipallo on symmetrisesti herättävään kenttään nähden. Tällöin sirontapoikkipinta on samanlainen E- ja H-tasoissa. Muilla kulman α arvoilla takaisinsironta poikkeaa nolasta, mutta eteenpäinsironta on huomattavasti suurempi. Lisäksi sirontapoikkipinta on erilainen E- ja H-tasoissa. Pieni PEC-puolipallo on puolestaan erittäin voimakas takaisinsirottaja, mutta PEC-puolipallo sirottaa myös eteenpäin. Lisäksi huomataan, että sirontapoikkipinta on erilainen E- ja H-tasossa riippumatta kulmasta α .

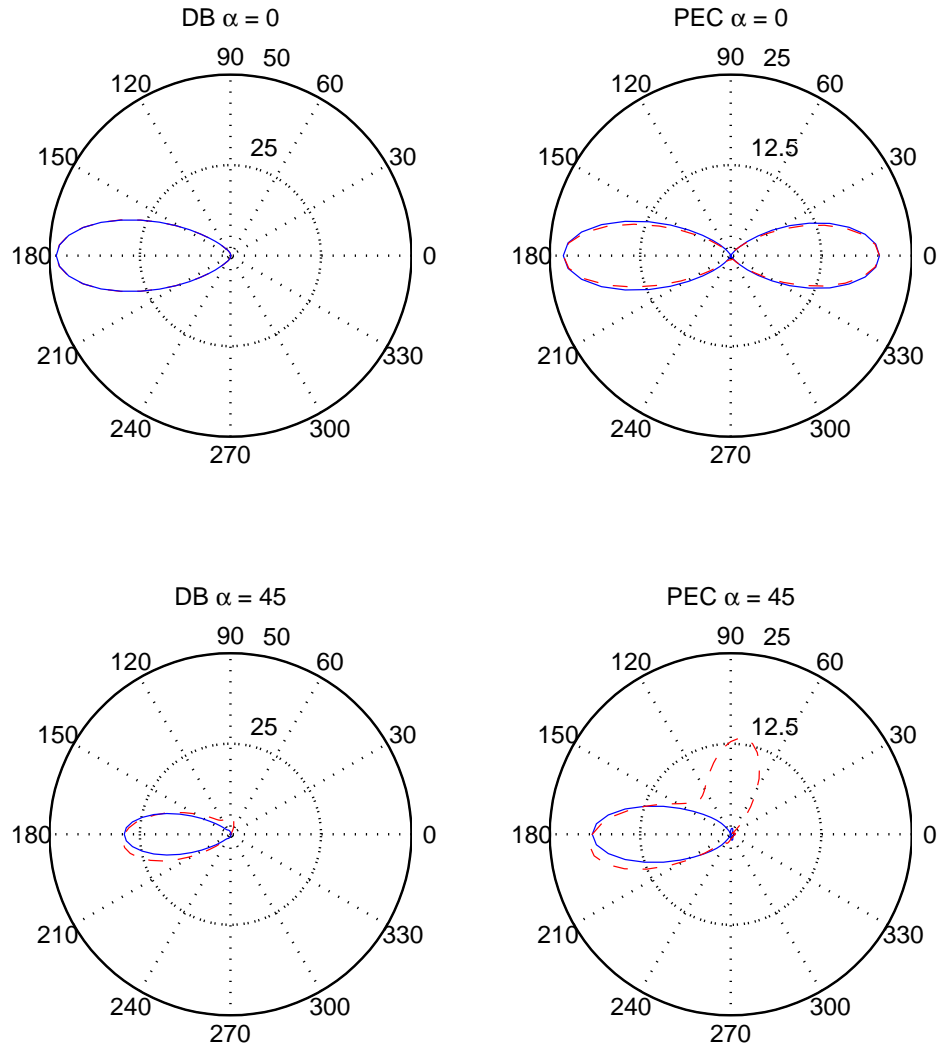
Kuvissa 52 ja 53 nähdään sirontapoikkipinnat eri asennoissa olevista DB- ja PEC-puolipalloista, joiden kokoparametri $ka = 4$. Sirontapoikkipinta on esitetty yhteisellä viivalla E-tasossa, jolloin kulma $\varphi = 90$ astetta ja katkoviivalla H-tasossa,



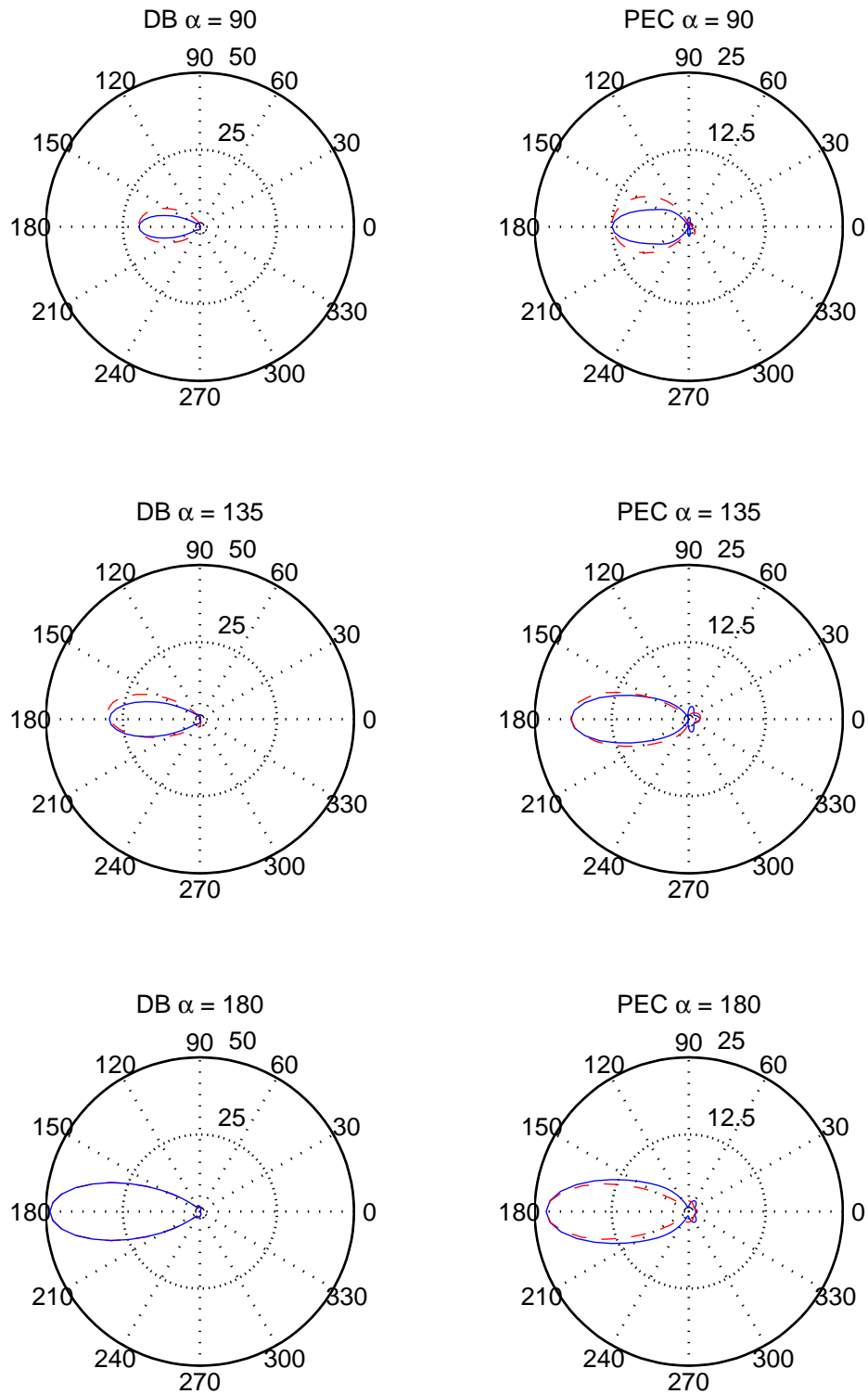
Kuva 50: DB- ja PEC-puolipallojen sirontakuviot napakoordinaatistossa esitettynä kulman α ollessa 0 ja 45 astetta. Yhtenäinen viiva kuvaa sirontapoikkipintaa E-tasossa ja katkoviiva esittää sirontapoikkipintaa H-tasossa. Puolipallon kokoparametri $ka = \frac{2\pi}{1000}$. Lineaarisesti polarisoitunut tasoaalto etenee oikealta vasemmalle.



Kuva 51: Muuten sama tilanne kuin kuvassa 50 mutta kulma α on 90, 135 ja 180 astetta.



Kuva 52: Aallonpituuteen nähden suurien ($ka = 4$) DB- ja PEC-puolipallojen sirontakuviot napakoordinaatistossa esitettynä kulman α ollessa 0 ja 45 astetta. Yhteinen viiva kuvaa sirontapoikkipintaa E-tasossa ja katkoviiva esittää sirontapoikkipintaa H-tasossa. Lineaarisesti polarisoitunut tasoaalto etenee oikealta vasemmalle.



Kuva 53: Muuten sama tilanne kuin kuvassa 52 mutta kulma α on 90, 135 ja 180 astetta.

jolloin kulma $\varphi = 0$ astetta.

DB-puolipallon, jonka kokoparametri on neljä, takaisinsironta on nolla, jos kulma $\alpha = 0$ astetta tai $\alpha = 180$ astetta. Näissä tapauksissa puolipallo on symmetrisesti herättävään kenttään nähden. Eteenpäinsironta on suurimmillaan, kun $\alpha = 180$ astetta, mutta ero on hyvin pieni verrattuna tilanteeseen, missä $\alpha = 0$. Lisäksi sirontapoikkipinta on samanlainen E- ja H-tasoissa.

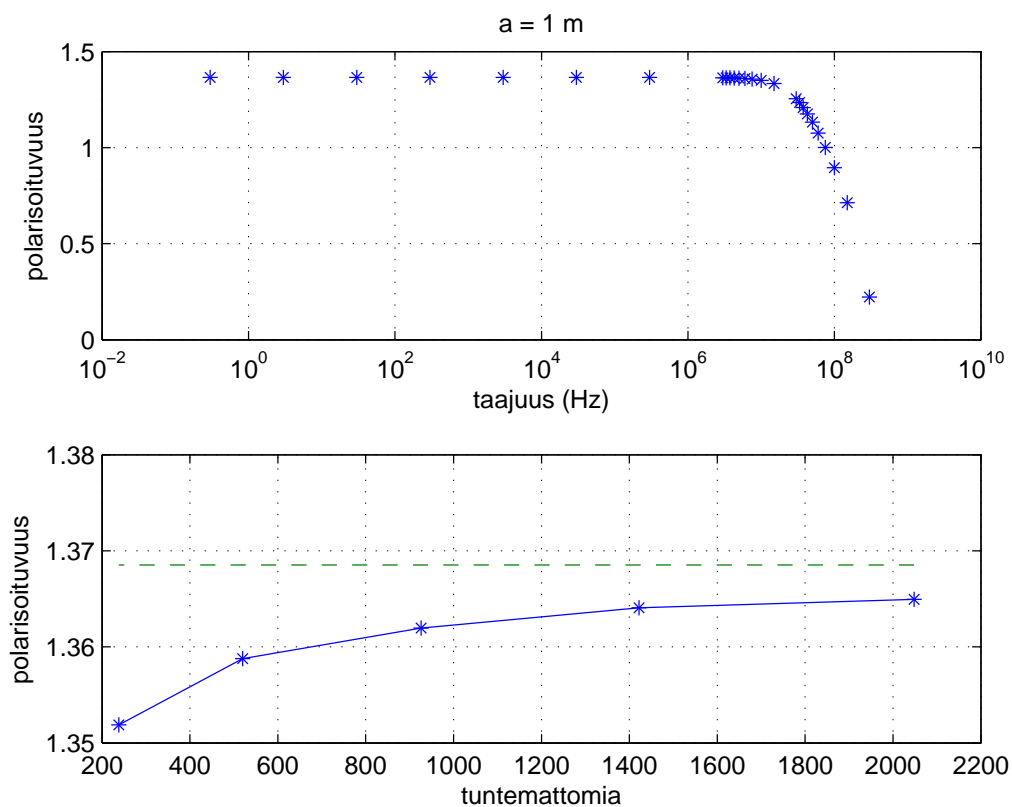
Muilla kulman α arvoilla takaisinsironta DB-pallosta saa nollasta poikkeavia arvoja. Tosin takaisinsironta on hyvin pientä verrattuna eteenpäinsirontaan. Lisäksi sirontakuvion maksimin paikalla H-tasossa on pientä riippuvuutta puolipallon asennon kanssa.

PEC-puolipallo on voimakas takaisinsirottaja, jos kulma $\alpha = 0$ astetta. Kulman α ollessa 180 astetta takaisinsironta on puolestaan hyvin vähäistä. Ison PEC-puolipallon tasainen sivu käyttäytyy peilin tavoin, joten sirontakuvion maksimi on kulmassa $\theta = 2\alpha$, jos tasainen sivu on valaistu. Kuvan 52 puolipallon kokoparametri on neljä, joten kyseinen ilmiö alkaa näkyä. Kulman α ollessa 45 astetta paikallinen maksimi syntyy lähelle 90 astetta.

DB-puolipallolle voidaan laskea staattinen polarisoituvuus eteenpäinsironneen tutkapoikkipinnan avulla kaavalla (68), jos puolipallo on symmetrisesti herättävään kenttään nähden. Tällöin kulma α on 0 tai 180 astetta. Kuvassa 54 on esitetty DB-puolipallon polarisoituvuus laskettuna $N\text{-}EFIE_{DB}$ ja $N\text{-}MFIE_{DB}$ yhtälöillä ja kantafunktioina on käytetty silmukkakantafunktioita.

Kuvassa 54 ylhäällä nähdään pintaintegraaliyhtälömenetelmällä laskettu DB-puolipallon polarisoituvuus taajuuden funktiona. Samoin kuin pallon ja kuution tapauksessa puolipallon polarisoituvuus pystytään määrittämään hyvin laajalta taajuuskaistalta. Polarisoituvuus voidaan määrittää taajuuden ollessa alle 1 MHz, jolloin aallonpituus on noin 300 ertainen puolipallon säteeseen verrattuna.

Viitteessä [29] on laskettu polarisoituvuus dielektriselle puolipallolle, jonka suhteellinen permittiivisyys $\epsilon_r = 0$. Tämä vastaa DB-puolipallon sähköistä polarisoituvuutta, ja sen arvoksi on saatu $1,36853$ suhteellisen virheen ollessa pienempi kuin 10^{-5} . Kuvassa 54 alhaalla on esitetty pintaintegraaliyhtälömenetelmällä laskettu polarisoituvuus tuntemattomien funktiona ja viitteessä [29] määritetty polarisoituvuus. Huomataan, että pintaintegraaliyhtälömenetelmällä laskettu polarisoituvuus suppenee kohti tarkkaa arvoa lisättäessä tuntemattomien määrää.



Kuva 54: DB-puolipallolle laskettu polarisoituvuus taajuuden funktiona kulman α ollessa 0 ja 180 astetta. Puolipallon säde on 1 m. Kuvassa alhaalla nähdään polarisoituvuus tuntemattomien määrän funktiona, kun aallonpituus on 10000 m. Polarisoituvuuden tarkka arvo on esitetty katkoviivalla.

7 Yhteenveto

Tämän diplomityön tarkoituksena oli tutkia sähkömagneettisen säteilyn sirontaa lähteettömän reunaehdon toteuttavista kappaleista. Lähteetön reunaehto tunnetaan myös nimellä DB-reunaehto, koska ekvivalenttien pintavirtatiheyksien divergenssittömyydestä seuraa pinnan normaalin suuntaisten sähkö- ja magneettivuontiheyskomponenttien häviäminen. Sironta laskettiin pintaintegraaliyhtälömenetelmällä erikoisista DB-reunaehdon toteuttavista palloista, kuutioista, puolipalloista ja epäsymmetrisestä laatikosta. Lisäksi sirontaa verrattiin samanlaisten PEC-reunaehdon kappaleiden sirontaan.

Laskemalla sirontaa erikokoisista DB-palloista huomattiin, että takaisinsironta on aina nolla pallon koosta riippumatta. Toisin sanoen monostaattisella tutkalla ei pystyttäisi havaitsemaan DB-palloa. DB-pallo on kuitenkin voimakas eteenpäinsirottaja ja sirontakuvion pääkeila kapenee pallon koon kasvaessa ja samalla sirontakuvioon syntyy pieniä sivukeiloja. Lisäksi sirontakuviio on pyörähdysymmetrinen tulevan aallon suhteen eli herättävän kentän polarisaatio ei vaikuta sirontakuvioon.

Kvasistaattisella analyysillä voidaan tarkasti määrittää DB-pallolle staattinen polarisoituvuus. Vaikka polarisoituvuus onkin statiikan parametri, laskettiin DB-pallon polarisoituvuus eteenpäinsironneen tutkapoikkipinnan avulla, joka ratkaistiin dynamiikan pintaintegraaliyhtälömenetelmällä. Kävi ilmi, että polarisoituvuuden laskemiseksi pallon halkaisijan pitää olla yli 100 kertaa lyhyempi kuin aallonpituuden. Polarisoituvuus laskettiin 984 tuntemattomalla, jolloin suhteellinen virhe oli luokkaa 10^{-3} . Lisäämällä tuntemattomia eli tihentämällä geometrian diskreetointia suhteellinen virhe saatiin vielä pienemmäksi. Lisäksi laskennassa päästiin lähes nollataajuudelle asti eli lähes staattiseen tilanteeseen. Näin ollen DB-reunaehdon tapauksessa ei havaittu perinteisiä matalan taajuuden ongelmia, mitä yleensä dynamiikan menetelmissä ilmenee.

DB-pallolle laskettiin myös sirontatehokkuus pallon koon funktiona. Sirontatehokkuus saadaan integroimalla sirontapoikkipintaa avaruuskulman yli ja jakamalla se geometrisella poikkipinnalla. DB-pallon sirontatehokkuus saa maksimiarvonsa pallon kokoparametrin ollessa $ka = 3$. PEC-pallo saa maksimiarvonsa pallon koon ollessa $ka = 1,2$. Lisäksi havaittiin, että PEC-pallo on voimakkaampi sirottaja, jos kokoparametri on pienempi kuin kaksi, mutta jos kokoparametri on suurempi kuin kaksi, DB-pallo on voimakkaampi sirottaja. DB-pallon sirontatehokkuus voidaan laskea myös Mie-sarjan avulla. Mie-sarjalla ja pintaintegraaliyhtälömenetelmällä lasketut tulokset vastasivat melko hyvin toisiaan.

Tässä työssä tutkittiin myös DB-pallon pinnalle indusoituneita ekvivalentteja sähköisiä ja magneettisia pintavirtatiheyksiä. Tuloksista huomattiin, että ekvivalentit pintavirtatiheydet muodostuvat silmukoista eli ne ovat divergenssittömiä. Näin tietysti pitääkin olla, koska DB-reunaehto vaatii pintavirtatiheyksien olevan divergenssittömiä taajuuden ollessa korkeampi kuin nolla. Sähköinen ja magneettinen pintavirtatiheys käyttäytyvät muuten samalla tavalla, mutta magneettinen pintavirtatiheys on kiertynyt 90 astetta sähköiseen pintavirtatiheyteen verrattuna.

Laskemalla sirontaa DB-kuutioista havaittiin, että takaisinsirontaa ei ole, jos kuution sivu on kohtisuorassa tulevaa aaltoa vastaan. Tällöin kuutio on symmetrinen herättävään kenttään nähden. Suurin takaisinsironta saadaan kun kuution ja tulevan aallon välinen kulma on 45 astetta. Lisäksi sirontapoikkipinta on erilainen E- ja H-tasoissa, jos tuleva aalto ei ole kohtisuorassa kuution sivua vastaan.

DB-kuutiolle laskettiin staattinen polarisoituvuus eteenpäinsironneesta tutkapoikkipinnasta ja sen arvoksi saatiin 1,63, mikä on hieman suurempi kuin pallon polarisoituvuus 1,5. Myöskään kuution polarisoituvuuden laskemisessa ei ilmennyt matalan taajuuden ongelmia, ja polarisoituvuus pystyttiin määrittämään hyvin laajalta taajuuskaistalta. Polarisoituvuuden määrittämisessä kuution sivun pituuden pitää olla yli 100 kertaa lyhyempi kuin aallonpituuden.

Laskemalla DB-kuution sirontatehokkuutta havaittiin kuution asennolla olevan voimakas vaikutus sirontatehokkuuteen varsinkin korkeilla taajuuksilla. Matalilla taajuuksilla PEC-kuutio on DB-kuutiota voimakkaampi sirottaja riippumatta kuution asennosta. Lisäksi havaittiin, että DB-kuution sirontatehokkuus ei riipu herättävän kentän polarisaatiosta, mutta PEC-kuution sirontatehokkuudessa havaittiin voimakas riippuvuus polarisaatiosta.

DB-kuution särmillä ekvivalenttien pintavirtatiheyksien havaittiin olevan singulaarisia. Singulaarisuudet ilmenivät särmillä, missä pintavirtatiheydet olivat särmien suuntaiset. Ekvivalenttien pintavirtatiheyksien singulaarisuudet laskettiin Laplaceen yhtälöstä ja havaittiin, että voimakkain singulaarisuus DB-kuution särmällä on verrannollinen termiin $\rho^{-1/3}$, missä ρ on etäisyys särmästä. Näin ollen singulaarisuus on sama kuin PEC-kuution tapauksessa. Ekvivalentit pintavirtatiheydet DB- ja PEC-kuutiolle lähellä kuution särmää laskettiin myös pintaintegraaliyhtälömenetelmällä ja ne käyttäytyivät statiikan ennustamalla tavalla.

Sironta laskettiin myös epäsymmetrisestä DB-laatikosta, missä yksi sivu oli huomattavasti pidempi kuin muut sivut. Tuloksista huomattiin, että laatikon pitkän sivun ollessa kohtisuorassa tulevaa aaltoa vastaan takaisinsironta on melko voimakasta. Ainoastaan herättävään kenttään nähden symmetrisen DB-kappaleen takaisinsironta on nolla.

Lisäksi työssä tarkasteltiin sirontaa DB-puolipallosta. Tuloksista kävi ilmi, että puolipallon asennolla on vaikutusta sirontakuvion maksimin paikkaan. Tosin tämä vaikutus on melko vähäistä verrattuna PEC-puolipallon tapaukseen. Ison PEC-puolipallon tasainen pinta käyttäytyy peilin tavoin, joten puolipallon asennolla on suuri vaikutus sirontakuvion maksimin paikkaan. DB-puolipallolle laskettiin myös poikittainen polarisoituvuus ja sen arvoksi saatiin noin 1,37. Aksiaalista polarisoituvuutta ei pystytty laskemaan tutkapoikkipinnan avulla puolipallon epäsymmetriasta johtuen.

Sähkömagneettisen säteilyn sironnan laskeminen DB-reunaehdon toteuttavista kappaleista näyttäisi onnistuvan melko tarkasti käytetyllä integraaliyhtälöformulaatiolla. Varsinkin pallon tapauksessa tulokset vastasivat hyvin Mie-sarjalla ja kvasistaattisen analyysin avulla saatuja tuloksia. Kuution tapauksessa tulosten tarkkuutta on huomattavasti vaikeampi arvioida, koska kuutiolle ei ole löydetty analyttistä ratkaisua. Lisäksi DB-kuutioita ei ole olemassa, joten saatuja tuloksia ei voida verra-

ta mittaustuloksiin. Myöskään kaupallisia ohjelmia, joilla voisi laskea sirontaa DB-kappaleista, ei ole olemassa. Ratkaisu saatiin kuitenkin suppenemaan elementtejä lisäämällä, joten laskettujen tulosten pitäisi olla ainakin suurin piirtein oikein.

Sirontatehtävä DB-reunaehdon toteuttavista kappaleista pystyttiin ratkaisemaan erittäin laajalla taajuusalueella käyttäen pintaintegraaliyhtälömenetelmää. Korkeilla taajuuksilla esiintyvät sisäresonanssien aiheuttamat ongelmat pystyttiin kokonaan poistamaan käyttämällä yhdistettyjä integraaliyhtälöitä. Aallonpituuteen nähden suurten kappaleiden tapauksessa integraaliyhtälömenetelmä vaatii kuitenkin erittäin paljon laskentakapasiteettia, koska muistin tarve kasvaa tuntemattomien määrän neliöön verrannollisesti.

Kantafunktioiden valinta vaikuttaa huomattavasti ratkaisun tarkkuuteen. RWG-kantafunktiolla saavutettiin huonoin tarkkuus riippumatta kappaleesta. Pallon tapauksessa paras tarkkuus tuntemattomien määrään verrattuna saavutettiin silmukkakantafunktiolla. Jos tarkkuutta verrataan geometrian diskretointiin, RWG+LL kantafunktiolla saadaan paras tarkkuus. Tämä johtuu siitä, että samalla geometrian diskretoinnilla RWG+LL kantafunktiot vaativat noin viisi kertaa enemmän tuntemattomia kuin silmukkakantafunktiot. Kuution tapauksessa RWG+LL kantafunktiot suppenivat huomattavasti nopeammin elementtien määrää lisättäessä verrattuna RWG- tai silmukkakantafunktioihin. Syynä tähän on kuution terävät särmät, joiden lähellä RWG- ja silmukkakantafunktiot eivät pysty hyvin kuvaamaan ekvivalentteja pintavirtatiheyksiä.

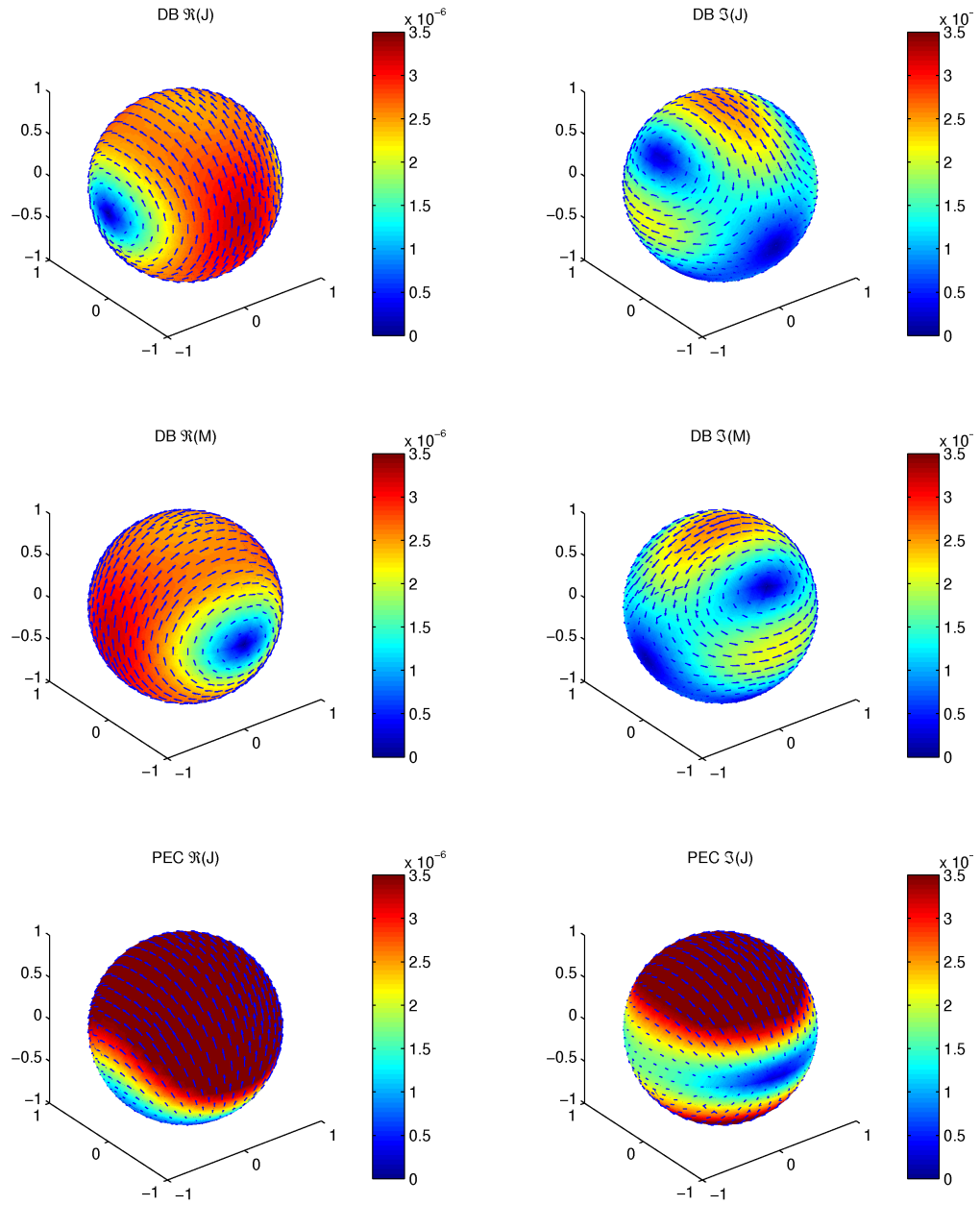
Työn lopputulosta voidaan pitää onnistuneena ja tavoitteita saavutettuina. Työssä onnistuttiin kehittämään ohjelma, jonka avulla sirontatehtävä DB-reunaehdon toteuttavista kappaleista voidaan ratkaista melko hyvällä tarkkuudella. Lisäksi saavutettiin parempi ymmärrys DB-kappaleiden sirontaominaisuuksista. Työtä voitaisiin myös kehittää eteenpäin. Erityisesti singulaaristen integraalien numeerinen laskeminen kaipaisi lisää tarkkuutta. Lisäksi olisi hyvä miettiä nopeiden integraaliyhtälömenetelmien käyttöä DB-reunaehdon tapauksessa, jolloin olisi mahdollista ratkaista sirontatehtävä huomattavasti monimutkaisemmista kappaleista.

Viitteet

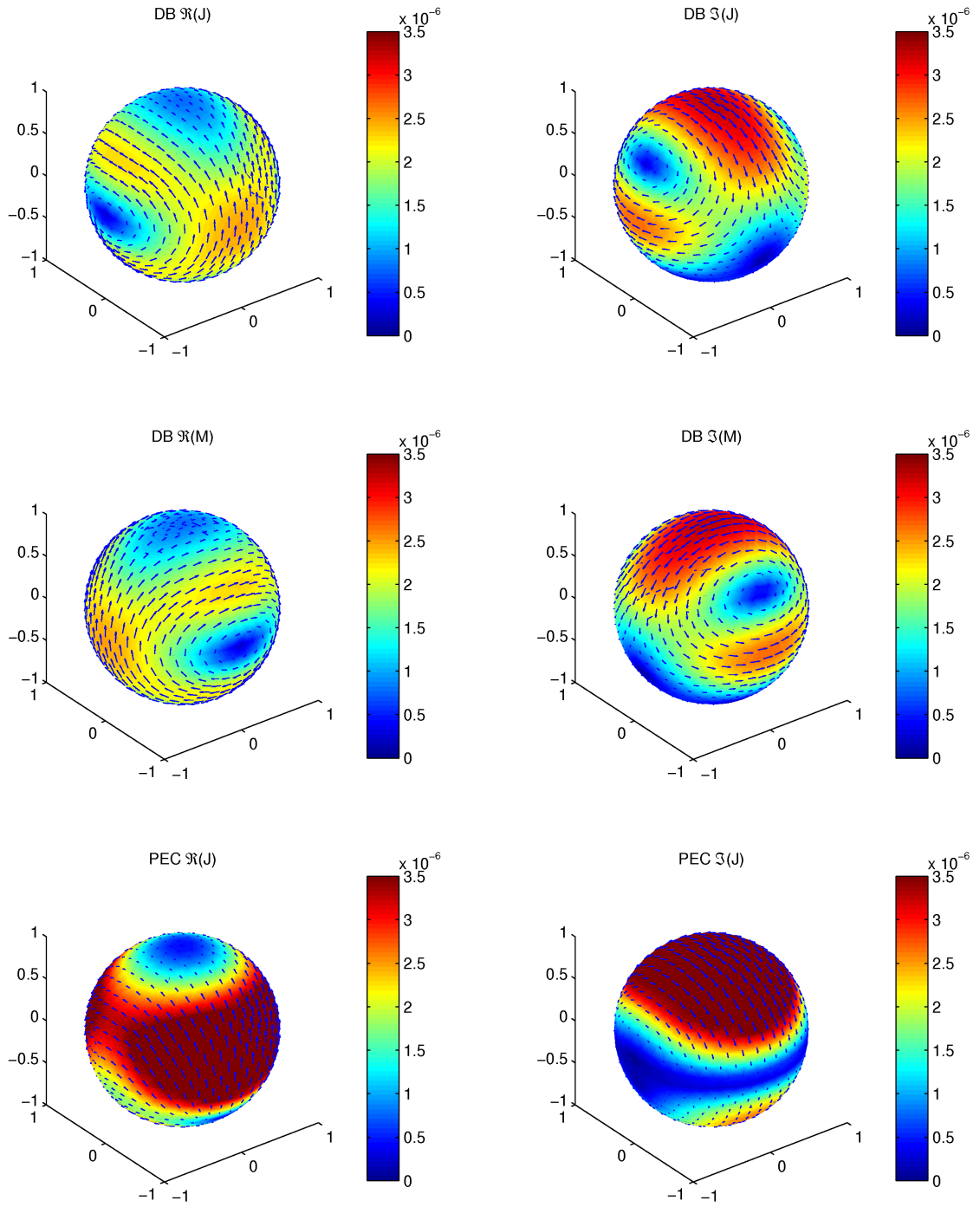
- [1] V. Rumsey. Some new forms of Huygens' principle. *Antennas and Propagation, IRE Transactions on*, 7(5):103–116, Dec. 1959.
- [2] K. S. Yee. Uniqueness theorems for an exterior electromagnetic field. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 18(1):77–83, Jan. 1970.
- [3] R. Picard. Zur lösungstheorie der zeitunabhängigen maxwellschen gleichungen mit der randbedingung $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = 0$ in anisotropen, inhomogenen medien. *Manuscripta Mathematica*, 13(1):37–52, 1974.
- [4] I. V. Lindell and A. H. Sihvola. Electromagnetic boundary and its realization with anisotropic metamaterial. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 79(2):026604, 2009.
- [5] A. Sihvola. Metamaterials: A personal view. *Radioengineering*, 18(2):90–94, June 2009.
- [6] M. Lapine and S. Tretyakov. Contemporary notes on metamaterials. *Microwaves, Antennas and Propagation, IET*, 1(1):3–11, Feb. 2007.
- [7] G. Mie. Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. *Annalen der Physik*, 25:377–445, 1908.
- [8] D. Sievenpiper, L. Zhang, R.F.J. Broas, N.G. Alexopolous, and E. Yablonovitch. High-impedance electromagnetic surfaces with a forbidden frequency band. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 47(11):2059–2074, Nov. 1999.
- [9] I. V. Lindell and A. H. Sihvola. Perfect electromagnetic conductor. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 19(7):861–869, 2005.
- [10] I.V. Lindell and A.H. Sihvola. Realization of the PEMC boundary. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 53(9):3012–3018, Sept. 2005.
- [11] P.-S. Kildal. Definition of artificially soft and hard surfaces for electromagnetic waves. *Electronics Letters*, 24(3):168–170, Feb. 1988.
- [12] J. G. Van Bladel. *Electromagnetic Fields*, volume 2. Wiley Interscience, A John Wiley & Sons, publication, 2007.
- [13] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*, volume 3. John Wiley & Sons, 1998.
- [14] A. Sihvola, T.K. Sarkar, and B. Kolundžija. From radar cross section to electrostatics. *Antennas and Wireless Propagation Letters, IEEE*, 3:324–327, 2004.
- [15] J. A. Kong. *Electromagnetic Wave Theory*. EMW Publishing, Cambridge, MA, 2000.

- [16] R. F. Harrington. *Time-harmonic Electromagnetic Fields*, volume 1. McGraw-Hill, 1961.
- [17] J. J. H. Wang. *Generalized Moment Methods in Electromagnetics*, volume 1. John Wiley & Sons, 1991.
- [18] J. A. Stratton. *Electromagnetic Theory*, volume 1. McGraw-Hill Company, New York, London, 1941.
- [19] A. J. Poggio and E. K. Miller. *Integral equation solutions of three-dimensional scattering problems*, in: R. Mittra (Ed.), *Computer Techniques for Electromagnetics*. Pergamon Press, Oxford, 1973.
- [20] M. Taskinen and S. Vänскä. Current and charge integral equation formulations and Picard's extended Maxwell system. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 55(12):3495–3503, Dec. 2007.
- [21] M. Taskinen and P. Ylä-Oijala. Current and charge integral equation formulation. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 54(1):58–67, Jan. 2006.
- [22] R. F. Harrington. *Field Computation by Moment Methods*, volume 1. IEEE press, New York, 1993.
- [23] S. Rao, D. Wilton, and A. Glisson. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 30(3):409–418, May 1982.
- [24] J.-F. Lee, R. Lee, and R.J. Burkholder. Loop star basis functions and a robust preconditioner for EFIE scattering problems. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 51(8):1855–1863, Aug. 2003.
- [25] M. G. Duffy. Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(6):1260–1262, 1982.
- [26] H. C. van de Hulst. *Light Scattering by Small Particles*, volume 1. Dover, New York, 1981.
- [27] A. Sihvola, H. Wallen, P. Ylä-Oijala, M. Taskinen, H. Kettunen, and I. V. Lindell. Scattering by DB spheres. *Antennas and Wireless Propagation Letters, IEEE*, 8:542–545, 2009.
- [28] M.G. Cote, M.B. Woodworth, and A.D. Yaghjian. Scattering from the perfectly conducting cube. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 36(9):1321–1329, Sep 1988.
- [29] H. Kettunen, H. Wallén, and A. Sihvola. Polarizability of a dielectric hemisphere. *Journal of Applied Physics*, 102(4):044105, 2007.

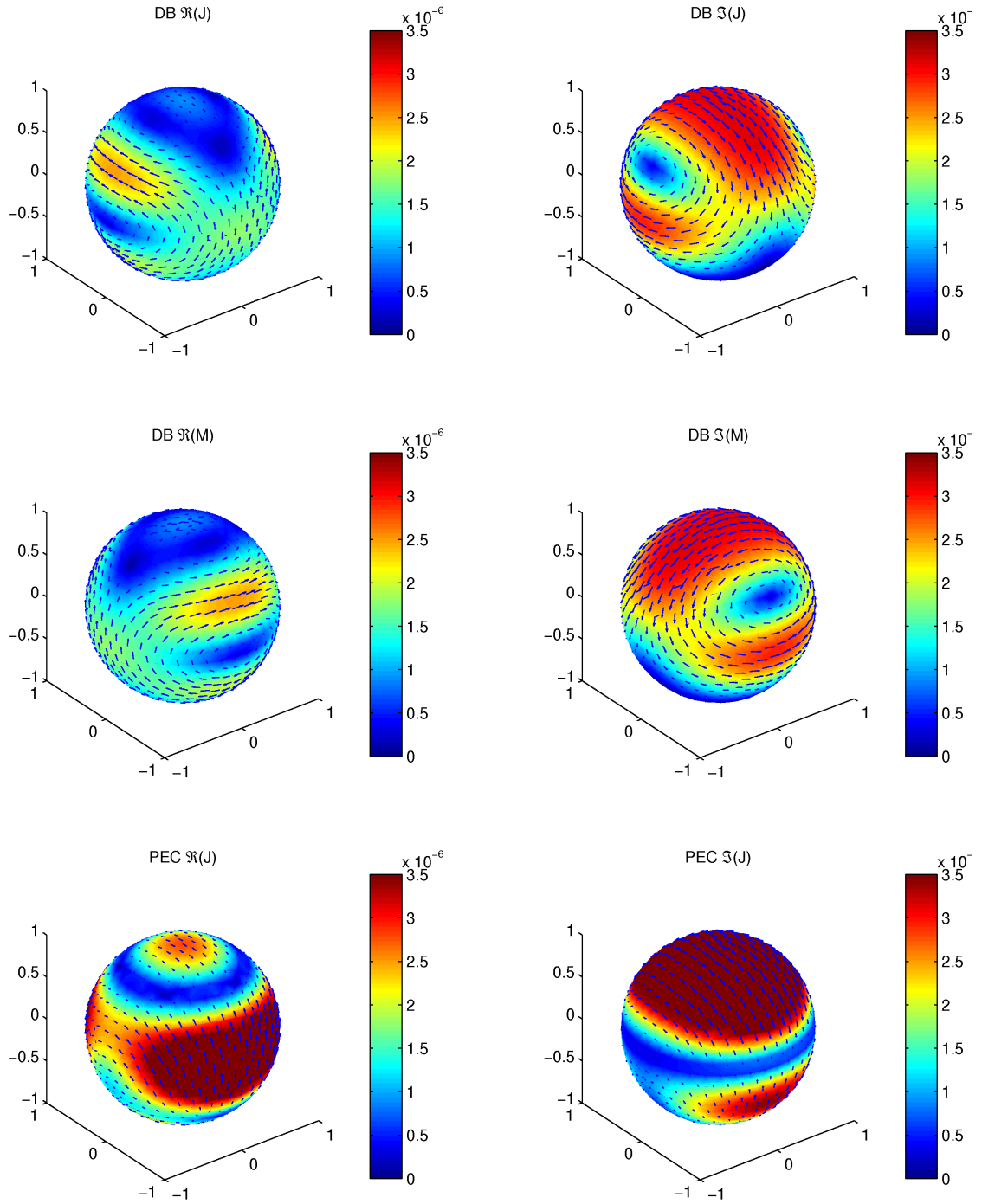
Liite A: Pintavirtatiheydet erikokoisten pallojen pinnoilla



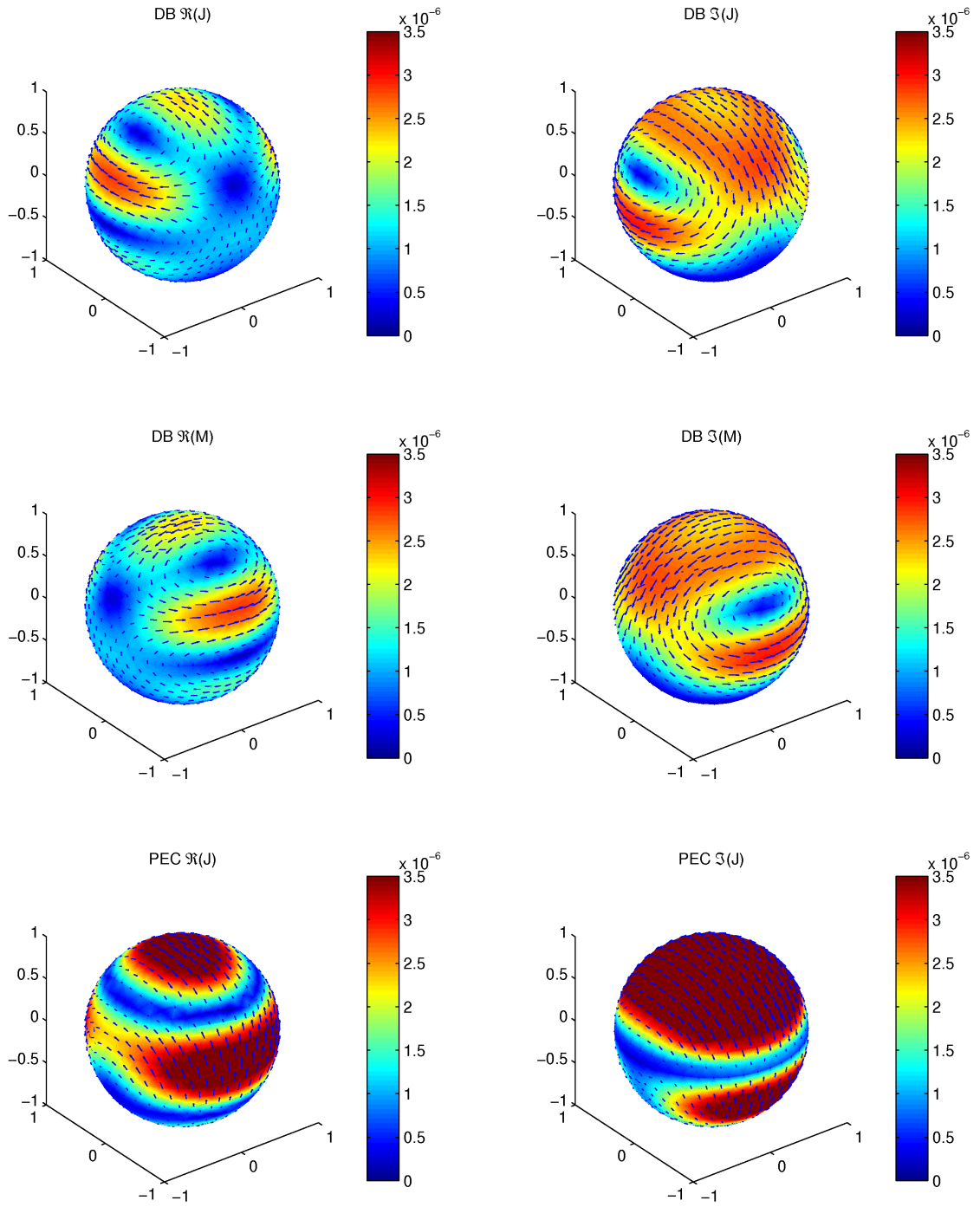
Kuva A1: DB- ja PEC-pallojen normalisoidut ekvivalentit pintavirtatiheydet pallon kokoparametrin ollessa $ka = 1$. Tasoaalto etenee $-z$ -akselin suuntaan eli se tulee kuvassa ylhäältä. Sähkökenttä on lineaarisesti polarisoitunut y -akselin suuntaisesti.



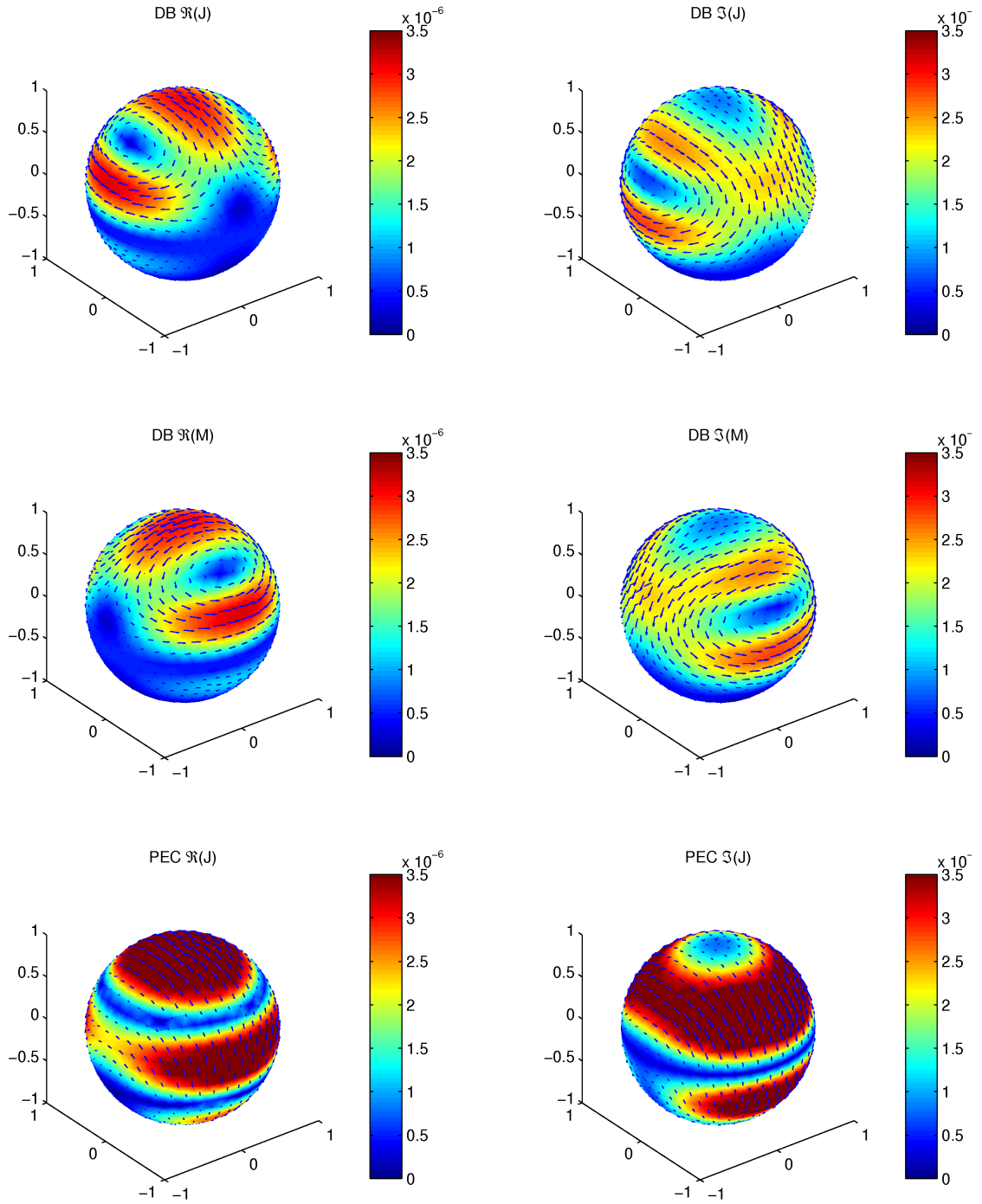
Kuva A2: Sama tilanne kuin kuvassa A1 mutta $ka = 1,5$.



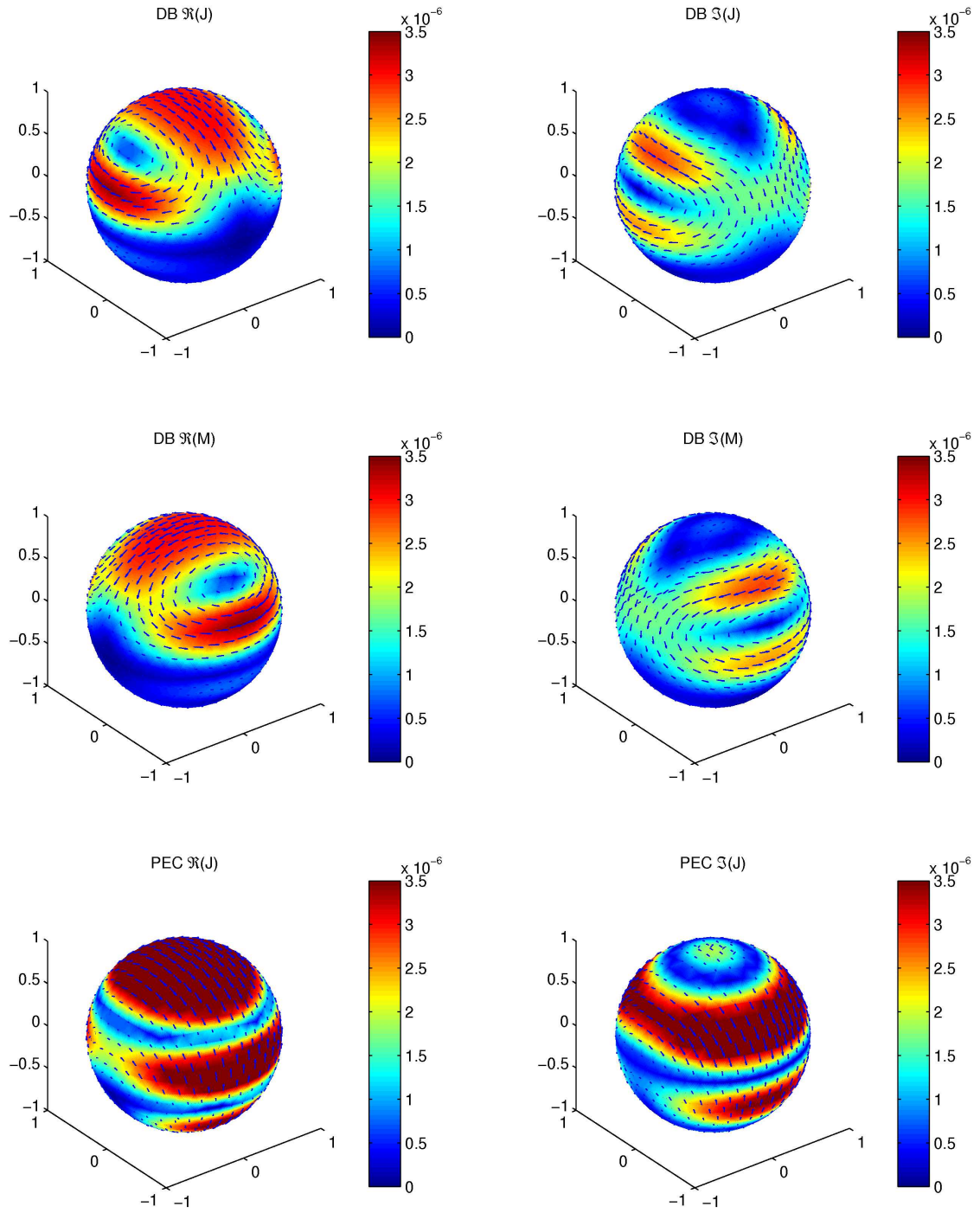
Kuva A3: Sama tilanne kuin kuvassa A1 mutta $ka = 2$.



Kuva A4: Sama tilanne kuin kuvassa A1 mutta $ka = 2.5$.



Kuva A5: Sama tilanne kuin kuvassa A1 mutta $ka = 3$.



Kuva A6: Sama tilanne kuin kuvassa A1 mutta $ka = 3,5$.